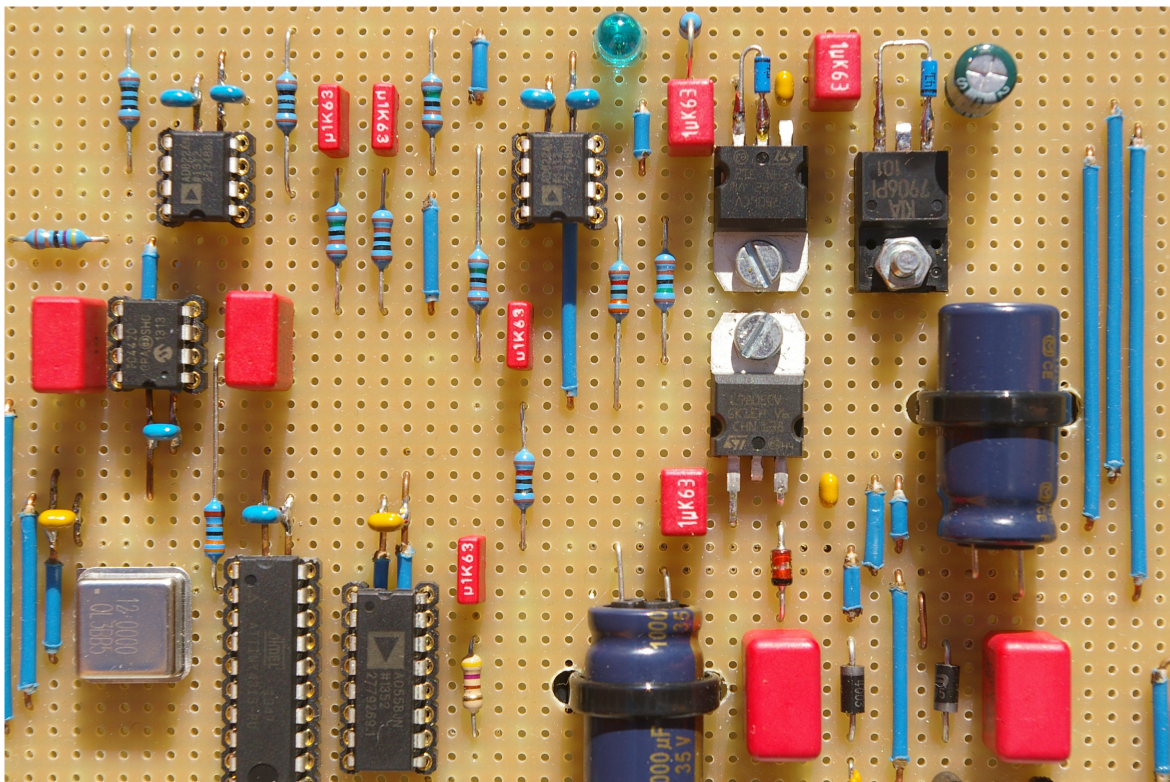
Tilman Küpper

Angewandte Elektronik

Formelsammlung



Hochschule München
https://kuepper.userweb.mwn.de/



Vorwort

In dieser Formelsammlung sind Definitionen, Formeln und Schaltungen aus dem Gebiet der Halbleiterelektronik so dargestellt, wie sie in der Lehrveranstaltung „Angewandte Elektronik“ behandelt werden. Diese Lehrveranstaltung wird an der Fakultät Maschinenbau, Fahrzeugtechnik, Flugzeugtechnik der Hochschule München in den Studiengängen Maschinenbau, Fahrzeugtechnik sowie Wirtschaftsingenieurwesen Automobilindustrie angeboten.

Die aktuelle Version der Formelsammlung kann von der Webseite des Autors heruntergeladen werden (https://kuepper.userweb.mwn.de/). Haben Sie Fehler oder Unklarheiten gefunden? Haben Sie Anregungen zur Form oder zum Inhalt? Dann melden Sie sich bitte bei: tilman.kuepper@hm.edu

München, 30. April 2023

Tilman Küpper

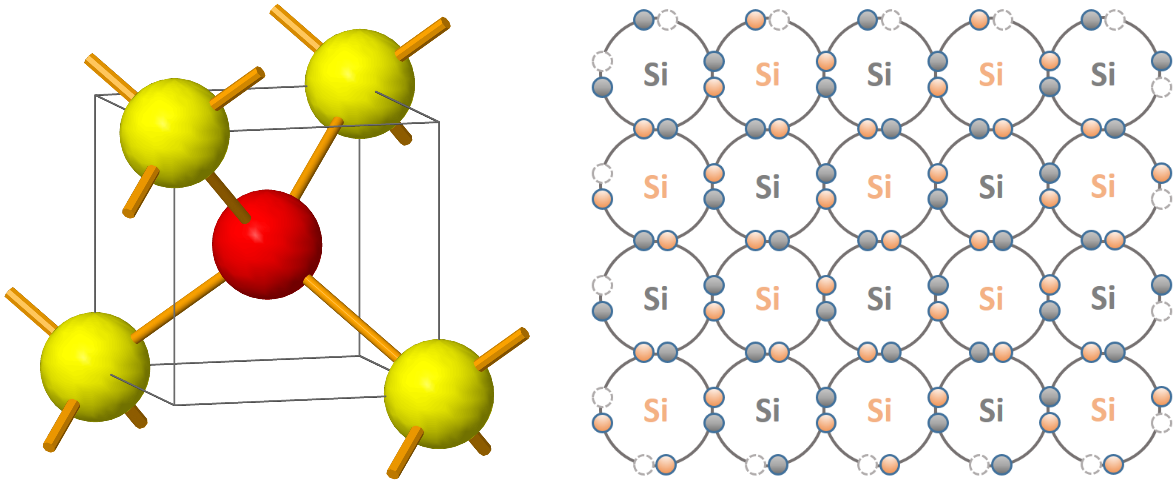
Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

Ohmscher Widerstand	$R = \frac{U}{I}$	$[R] = \Omega$
Elektrischer Leitwert	$G = \frac{1}{R}$	$[G] = \frac{1}{\Omega}$
Spezifischer Widerstand	$R = \rho \cdot \frac{l}{A}$	$[\rho] = \Omega\mathrm{m}$
Elektrische Leitfähigkeit	$\kappa = \frac{1}{\rho}$	$[\kappa] = \frac{1}{\Omega\mathrm{m}}$

2 Halbleiter

In einem einzelnen Siliziumatom ist die Valenzschale mit vier Elektronen besetzt. Zur Herstellung von Halbleiterbauelementen wird kristallines Silizium benötigt, hier gehen alle Atome kovalente Bindungen mit jeweils vier gleich weit entfernten Nachbarn ein (Diamantstruktur). Ähnliche Strukturen finden sich auch bei anderen Halbleitern.



Energiezufuhr, zum Beispiel durch Erwärmung oder Bestrahlung mit Licht, führt zur Generation von Ladungsträgerpaaren, also von freien Elektronen und von Löchern, im Halbleiter.

Dichte der freien Elektronen (negativ)	n_0	$[n_0] = \frac{1}{\mathrm{m}^3}$
Dichte der Löcher (positiv)	p_0	$[p_0] = \frac{1}{\mathrm{m}^3}$
Eigenleitungsdichte	n_i	$[n_\mathrm{i}] = \frac{1}{\mathrm{m}^3}$
Driftgeschwindigkeit der Elektronen	v_dn	$[v_\mathrm{dn}] = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
Driftgeschwindigkeit der Löcher	v_dp	$[v_\mathrm{dp}] = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
Beweglichkeit der freien Elektronen	μ_n	$[\mu_\mathrm{n}] = \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{Vs}}$
Beweglichkeit der Löcher	μ_p	$[\mu_\mathrm{p}] = \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{Vs}}$

Im hochreinen (intrinsischen) Halbleiter sind die Dichte der freien Elektronen n_0 und die Löcherdichte p_0 gleich groß, weil beide Ladungsträgerarten stets paarweise generiert werden:

$$p_0 = n_0 = n_\mathrm{i} \tag{2.1}$$

Die Driftgeschwindigkeiten der beweglichen Ladungsträger (freie Elektronen, Löcher) im elektrischen Feld sind proportional zur elektrischen Feldstärke E:

$$v_{\mathrm{dn}} = E \cdot \mu_{\mathrm{n}} \tag{2.2}$$

$$v_{\mathrm{dp}} = E \cdot \mu_{\mathrm{p}} \tag{2.3}$$

Der spezifische Widerstand ρ des intrinsischen Halbleiters ist umgekehrt proportional zur Eigenleitungsdichte n_{i}:

$$\rho = \frac{1}{e \cdot n_{\mathrm{i}} \cdot (\mu_{\mathrm{n}} + \mu_{\mathrm{p}})} \tag{2.4}$$

Elektrische Leitfähigkeit κ des intrinsischen Halbleiters:

$$\kappa = e \cdot n_{\mathrm{i}} \cdot (\mu_{\mathrm{n}} + \mu_{\mathrm{p}}) \tag{2.5}$$

Elementarladung e:

$$e = 1{,}602\,177 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{As} \tag{2.6}$$

Dotierung, Störstellenleitung

Im dotierten Halbleiter sind die Dichte der freien Elektronen n_0 und die Löcherdichte p_0 nicht mehr gleich groß. Dotierung mit Donatoren führt zu n-Halbleitern ($n_0 > n_{\mathrm{i}} > p_0$), Dotierung mit Akzeptoren führt zu p-Halbleitern ($p_0 > n_{\mathrm{i}} > n_0$).

Donatordichte (ortsfest, positiv)	N_{D}	$[N_{\mathrm{D}}] = \frac{1}{\mathrm{m}^3}$
Akzeptordichte (ortsfest, negativ)	N_{A}	$[N_{\mathrm{A}}] = \frac{1}{\mathrm{m}^3}$

Insgesamt verhält sich der Halbleiter jedoch elektrisch neutral (Neutralitätsbedingung):

$$n_0 + N_{\mathrm{A}} = p_0 + N_{\mathrm{D}} \tag{2.7}$$

Außerdem gilt das Massenwirkungsgesetz:

$$n_0 \cdot p_0 = n_{\mathrm{i}}^2 \tag{2.8}$$

Aus Neutralitätsbedingung und Massenwirkungsgesetz kann die Ladungsträgerdichte im dotierten Halbleiter (n_0 und p_0) berechnet werden:

$$n_0 = \frac{N_{\mathrm{D}} - N_{\mathrm{A}}}{2} + \sqrt{\left(\frac{N_{\mathrm{D}} - N_{\mathrm{A}}}{2}\right)^2 + n_{\mathrm{i}}^2} \tag{2.9}$$

$$p_0 = \frac{N_{\mathrm{A}} - N_{\mathrm{D}}}{2} + \sqrt{\left(\frac{N_{\mathrm{A}} - N_{\mathrm{D}}}{2}\right)^2 + n_{\mathrm{i}}^2} \tag{2.10}$$

Bei Zimmertemperatur kann die Eigenleitungsdichte n_{i} oft vernachlässigt werden. In diesem Fall vereinfacht sich die Berechnung der Majoritätsträgerdichte:

	Majoritätsträger	Minoritätsträger
n-Halbleiter	$n_0 \approx N_D - N_A$	$p_0 = n_i^2 / n_0$
p-Halbleiter	$p_0 \approx N_A - N_D$	$n_0 = n_i^2 / p_0$

Der spezifische Widerstand ρ des dotierten Halbleiters hängt von der Dichte der freien Elektronen n_0 und von der Löcherdichte p_0 ab:

$$\rho = \frac{1}{e \cdot (n_0 \mu_n + p_0 \mu_p)} \tag{2.11}$$

Elektrische Leitfähigkeit κ des dotierten Halbleiters:

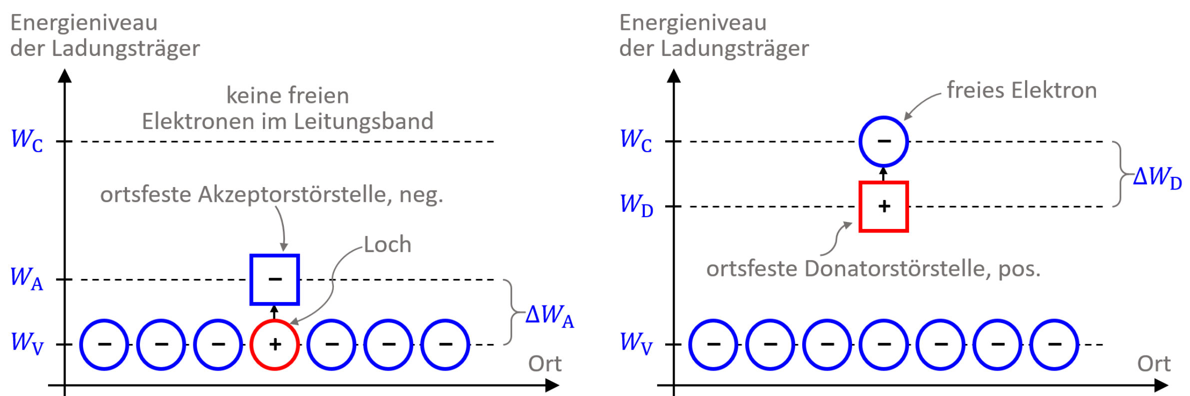
$$\kappa = e \cdot (n_0 \mu_n + p_0 \mu_p) \tag{2.12}$$

Anteile des Elektronenstroms I_n (entgegen der technischen Stromrichtung) und des Löcherstroms I_p (in technischer Stromrichtung) am Gesamtstrom (sog. Driftstrom):

$$I_{ges} = I_n + I_p \tag{2.13}$$

$$I_p = p_0 \cdot e \cdot A \cdot \mu_p \cdot E \tag{2.14}$$

$$I_n = n_0 \cdot e \cdot A \cdot \mu_n \cdot E \tag{2.15}$$



Die Abbildung zeigt das Bändermodell des p-Halbleiters (links) und des n-Halbleiters (rechts):

- W_V ist das Energieniveau der (gebundenen) Elektronen im Valenzband,
- W_C ist das Energieniveau der freien Elektronen im Leitungsband,
- W_A ist das Energieniveau der Akzeptor- und W_D das der Donatorstörstellen.
- Bei Zimmertemperatur sind alle Störstellen ionisiert, die dazu notwendige Ionisierungsenergie ΔW_A bzw. ΔW_D ist sehr klein.
- Zum Anheben eines Elektrons aus dem Valenz- ins Leitungsband ist die Energie $W_G = W_C - W_V$ (Bandabstand) erforderlich.

Im Folgenden sind die Daten einiger Halbleitermaterialien bei $T = 300\,\mathrm{K}$ aufgelistet (nach S. M. Sze: „Physics of Semiconductor Devices“, John Wiley & Sons, 1969):

		Einheit	Germanium	Silizium	Galliumarsenid
Bandabstand	W_G	eV	$0,66$	$1,12$	$1,43$
Eigenleitungsdichte	n_i	cm^{-3}	$2{,}4 \cdot 10^{13}$	$1{,}6 \cdot 10^{10}$	$1{,}1 \cdot 10^{7}$
Elektronenbeweglichkeit	μ_n	$\mathrm{cm}^2/\mathrm{Vs}$	3900	1500	8500
Löcherbeweglichkeit	μ_p	$\mathrm{cm}^2/\mathrm{Vs}$	1900	600	400
Durchbruchfeldstärke	E_Br	V/cm	$\approx 1 \cdot 10^5$	$\approx 3 \cdot 10^5$	$\approx 4 \cdot 10^5$

Diffusionsstrom

Ist die Ladungsträgerdichte im Halbleiter nicht konstant, so sind die freien Ladungsträger bestrebt, die Unterschiede in der Ladungsträgerdichte durch Diffusion auszugleichen:

$$I_\mathrm{n,diff} = +A \cdot e \cdot D_\mathrm{n} \cdot \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x} \tag{2.16}$$

$$I_\mathrm{p,diff} = -A \cdot e \cdot D_\mathrm{p} \cdot \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \tag{2.17}$$

Für die Diffusionskonstanten D_n und D_p gilt:

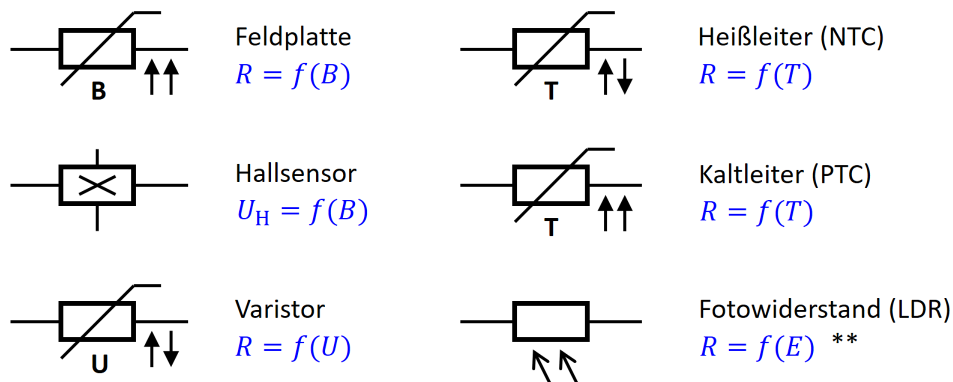
$$D_\mathrm{n} = k \cdot T \cdot \frac{\mu_\mathrm{n}}{e} \tag{2.18}$$

$$D_\mathrm{p} = k \cdot T \cdot \frac{\mu_\mathrm{p}}{e} \tag{2.19}$$

Boltzmannkonstante k:

$$k = 1{,}380\,649 \cdot 10^{-23}\,\frac{\mathrm{VAs}}{\mathrm{K}} \tag{2.20}$$

3 Homogene Halbleiterbauelemente



** Beleuchtungsstärke E in Lux (lx).

Sternenklare Nacht: $E = 0{,}001\,\mathrm{lx}$; Kerzenlicht in einem Meter Entfernung: $E = 1\,\mathrm{lx}$; Flur, Wohnraum: $E = 100\,\mathrm{lx}$; Arbeitsplatz: $E = 500\,\mathrm{lx}$; heller Sommertag: $E = 100\,000\,\mathrm{lx}$.

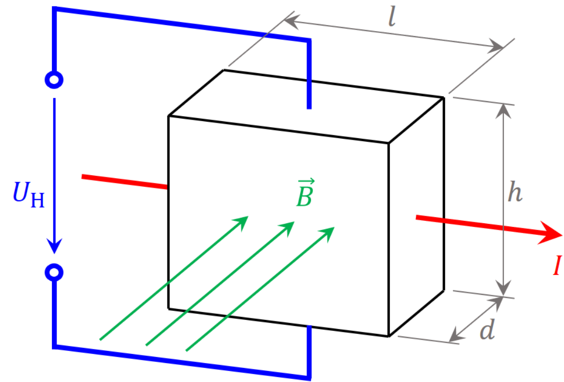
Hall-Effekt

Hallspannung U_H (p-Halbleiter):

$$U_\mathrm{H} = +\frac{B \cdot I}{d \cdot e \cdot p_0} = +\frac{B \cdot I}{d} \cdot R_\mathrm{H} \tag{3.1}$$

Hallspannung U_H (n-Halbleiter):

$$U_\mathrm{H} = -\frac{B \cdot I}{d \cdot e \cdot n_0} = -\frac{B \cdot I}{d} \cdot R_\mathrm{H} \tag{3.2}$$



Hallkoeffizient R_H (p-Halbleiter):

$$R_\mathrm{H} = \frac{1}{e \cdot p_0} \tag{3.3}$$

Driftgeschwindigkeit, Löcher:

$$|v_\mathrm{dp}| = \frac{I}{p_0 \cdot e \cdot h \cdot d} \tag{3.4}$$

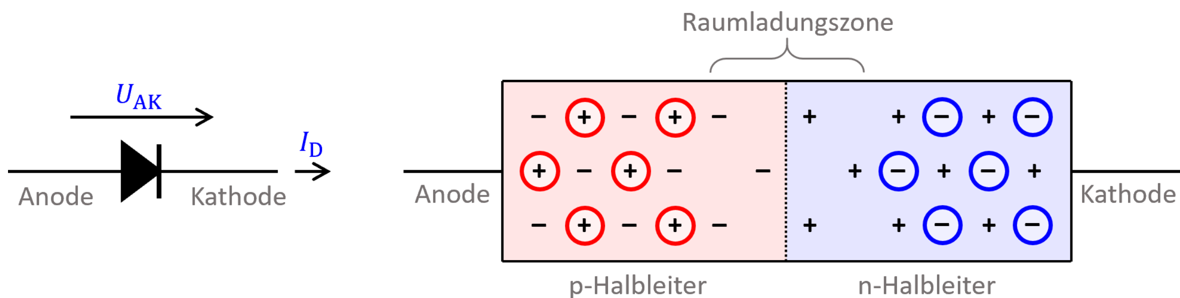
Hallkoeffizient R_H (n-Halbleiter):

$$R_\mathrm{H} = \frac{1}{e \cdot n_0} \tag{3.5}$$

Driftgeschwindigkeit, freie Elektronen:

$$|v_\mathrm{dn}| = \frac{I}{n_0 \cdot e \cdot h \cdot d} \tag{3.6}$$

4 Halbleiterdioden



Halbleiterdioden zeigen ein nichtlineares Verhalten, das im Durchlassbetrieb ($U_\mathrm{AK} > 0$) durch die sog. Shockley-Gleichung beschrieben wird (vergl. W. Shockley: „Electrons and Holes in Semiconductors", 3. Auflage, Bell Laboratories, 1953, S. 316, Gl. 33):

$$I_\mathrm{D} \approx I_\mathrm{S} \cdot (e^{\frac{U_\mathrm{AK}}{U_\mathrm{T}}} - 1) \tag{4.1}$$

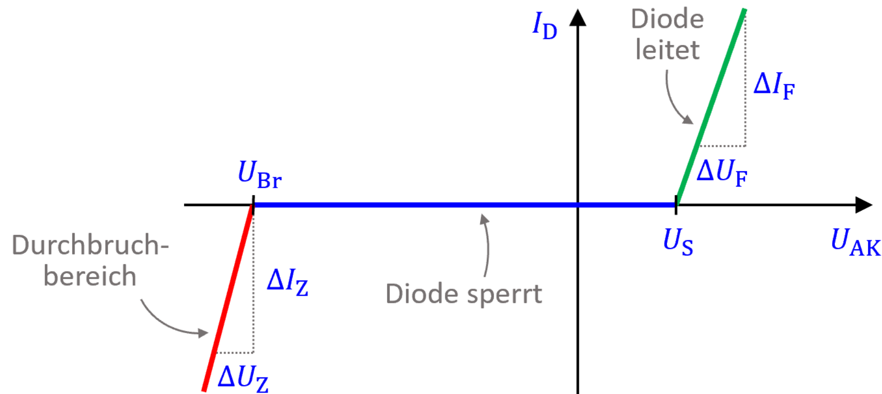
Für die Temperaturspannung U_T gilt (k = Boltzmannkonstante, T = Temperatur in Kelvin, e = Elementarladung):

$$U_\mathrm{T} = \frac{k \cdot T}{e}, \text{ bei } T = 300\,\mathrm{K} \text{ ist } U_\mathrm{T} = 25{,}852\,\mathrm{mV} \tag{4.2}$$

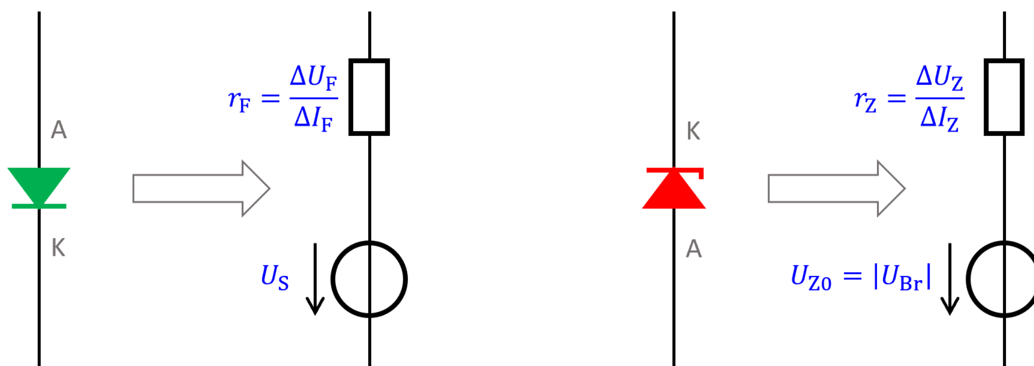
Der Sperrsättigungsstrom I_S wird durch die Halbleitereigenschaften, den konkreten Diodenaufbau und die Temperatur bestimmt. Er ist typischerweise einige wenige Nanoampere groß. Ein Temperaturanstieg um $10\,\mathrm{K}$ führt zu einer Verdoppelung von I_S.

Linearisierte Diodenkennlinie

Schwellenspannung: $U_\mathrm{S} \approx 0{,}6\,\mathrm{V}$ (Siliziumdioden), $U_\mathrm{S} \approx 0{,}3\,\mathrm{V}$ (Germaniumdioden)
Durchbruch: $U_\mathrm{Br} \approx -5\,\mathrm{V}$ (Leuchtdioden), $U_\mathrm{Br} \approx -50 \ldots -1000\,\mathrm{V}$ (Gleichrichter)



Aus der linearisierten Diodenkennlinie ergeben sich die folgenden Ersatzschaltbilder für eine Diode im Durchlassbetrieb (links) und im Durchbruch (rechts, Z-Diode):



5 Anwendungen von Dioden

In den folgenden Abschnitten zur Berechnung von Gleichrichterschaltungen werden, sofern es nicht anders angegeben ist, „ideale“ Gleichrichterdioden vorausgesetzt ($U_\mathrm{S} = 0\,\mathrm{V}$ und $r_\mathrm{F} = 0\,\Omega$).

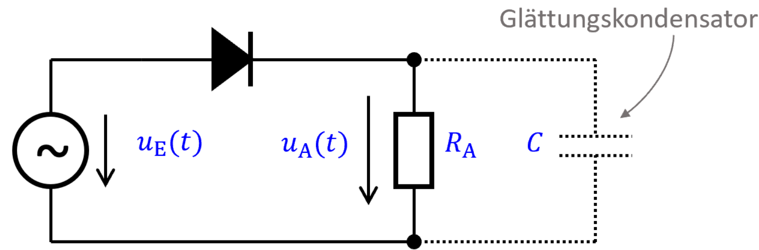
M1-Schaltung, Einweggleichrichter

Mittlere Spannung U_A am Lastwiderstand R_A, ohne Glättungskondensator C:

$$U_\mathrm{A} = \overline{u_\mathrm{A}(t)} = \frac{\hat{u}_\mathrm{E}}{\pi} \approx 0{,}318 \cdot \hat{u}_\mathrm{E} \tag{5.1}$$

Mittlere Spannung U_A am Lastwiderstand R_A, mit Glättungskondensator C:

$$U_\mathrm{A} = \frac{\hat{u}_\mathrm{E}}{\frac{T}{2R_\mathrm{A}C} + 1} = \frac{\hat{u}_\mathrm{E}}{\frac{T}{2\tau} + 1} \tag{5.2}$$



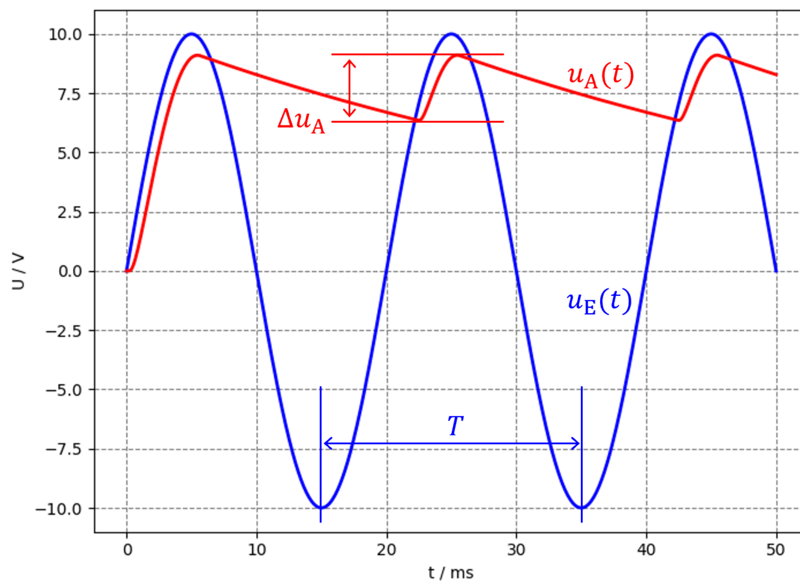
Spannungsschwankung Δu_A am Lastwiderstand R_A, mit Glättungskondensator C:

$$\Delta u_A = \frac{U_A}{R_A C} \cdot T = \frac{U_A}{\tau} \cdot T \tag{5.3}$$

Maximale Spannung an der Diode in Sperrrichtung, Näherungen:

$$\hat{u}_{\text{Sperr}} \approx \hat{u}_E \text{ (ohne Glättung)}, \; \hat{u}_{\text{Sperr}} \approx 2 \cdot \hat{u}_E \text{ (mit Glättung)} \tag{5.4}$$

Die folgende Abbildung zeigt die simulierten Spannungsverläufe $u_E(t)$ am Eingang und $u_A(t)$ am Ausgang der M1-Schaltung mit Lastwiderstand R_A und Glättungskondensator C. Gut sichtbar ist die periodische Spannungsschwankung Δu_A am Ausgang (siehe Anhang D für Details zur Schaltungssimulation).

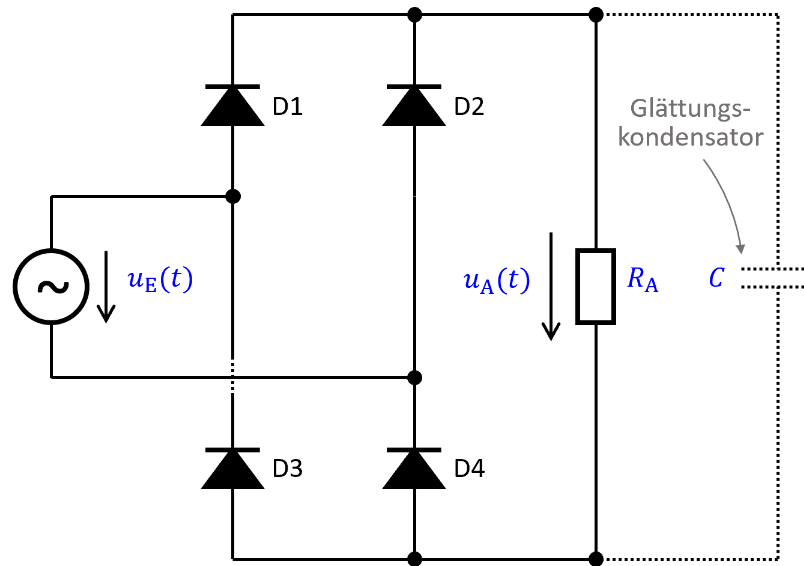


Im Beispiel sind $C = 470\,\mu\text{F}$, $R_A = 100\,\Omega$, $U_S = 0{,}7\,\text{V}$, $r_F = 1\,\Omega$, also keine „ideale“ Diode!

Bei „realen“ Dioden muss – abhängig von der Größe des Laststroms – im Durchlassbetrieb mit einem Spannungsabfall von ca. $0{,}6 \ldots 1{,}0\,\text{V}$ gerechnet werden. Der Scheitelwert $\hat{u}_A$ am Ausgang ist daher etwas kleiner als der Scheitelwert $\hat{u}_E$ am Eingang des Gleichrichters.

B2-Schaltung, Brückengleichrichter

Die B2-Schaltung, auch Brückengleichrichter oder Graetzschaltung genannt (nach Leo Graetz, 1856-1941, Physiker an der Universität München), ist die am häufigsten verwendete Gleichrichterschaltung für einphasigen Wechselstrom.



Mittlere Spannung U_A am Lastwiderstand R_A, ohne Glättungskondensator C:

$$U_A = \overline{u_A(t)} = 2 \cdot \frac{\hat{u}_E}{\pi} \approx 0,637 \cdot \hat{u}_E \tag{5.5}$$

Mittlere Spannung U_A am Lastwiderstand R_A, mit Glättungskondensator C:

$$U_A = \frac{\hat{u}_E}{\frac{T}{4R_AC} + 1} = \frac{\hat{u}_E}{\frac{T}{4\tau} + 1} \tag{5.6}$$

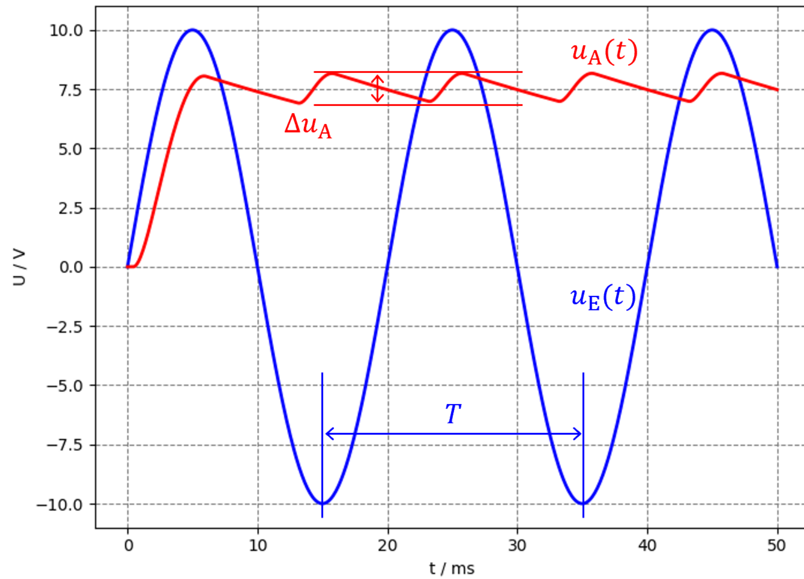
Spannungsschwankung Δu_A am Lastwiderstand R_A, mit Glättungskondensator C:

$$\Delta u_A = \frac{U_A}{2R_AC} \cdot T = \frac{U_A}{2\tau} \cdot T \tag{5.7}$$

Maximale Spannung an den Dioden in Sperrrichtung, Näherungen:

$$\hat{u}_{Sperr} \approx \hat{u}_E \text{ (mit und ohne Glättung)} \tag{5.8}$$

Die folgende Abbildung zeigt die Spannungsverläufe $u_E(t)$ am Eingang und $u_A(t)$ am Ausgang der B2-Schaltung mit Lastwiderstand R_A und Glättungskondensator C. Im Unterschied zur M1-Schaltung wird hier der Kondensator zweimal pro Periode T wieder aufgeladen (alle Bauelemente mit denselben Daten wie bei der M1-Schaltung auf Seite 7, keine „idealen“ Dioden!).



Bei der B2-Schaltung liegen stets zwei Dioden mit einem Spannungsabfall von zusammen ca. 1,2 ... 2,0 V im Stromkreis. Der Scheitelwert $\hat{u}_A$ am Ausgang ist daher nochmals etwas kleiner als bei der M1-Schaltung (bei gleicher Eingangsspannung).

M3-Schaltung, Dreipuls-Mittelpunktschaltung

$u_{1N}(t)$, $u_{2N}(t)$ und $u_{3N}(t)$ sind die Sternspannungen (Strangspannungen) eines Drehstromsystems; $u_{12}(t)$, $u_{23}(t)$ und $u_{31}(t)$ sind die Dreieckspannungen (verkettete Spannungen) eines Drehstromsystems:

$$\hat{u}_{\curlywedge} \cdot \sqrt{3} = \hat{u}_{\triangle} \text{ mit } \hat{u}_{\curlywedge} = \hat{u}_{1N} = \hat{u}_{2N} = \hat{u}_{3N} \text{ und } \hat{u}_{\triangle} = \hat{u}_{12} = \hat{u}_{23} = \hat{u}_{31} \tag{5.9}$$

Stern- und Dreieckspannungen im deutschen Niederspannungsnetz (gerundete Werte):

$$U_{\curlywedge\,\mathrm{eff}} = 230\,\mathrm{V}, U_{\triangle\,\mathrm{eff}} = 400\,\mathrm{V}, \hat{u}_{\curlywedge} = 325\,\mathrm{V}, \hat{u}_{\triangle} = 565\,\mathrm{V} \tag{5.10}$$

Mittlere Spannung U_A am Lastwiderstand R_A, ohne Glättung:

$$U_A = \overline{u_A(t)} \approx 0,827 \cdot \hat{u}_{\curlywedge} \tag{5.11}$$

Scheitelwert der Ausgangsspannung $u_A(t)$:

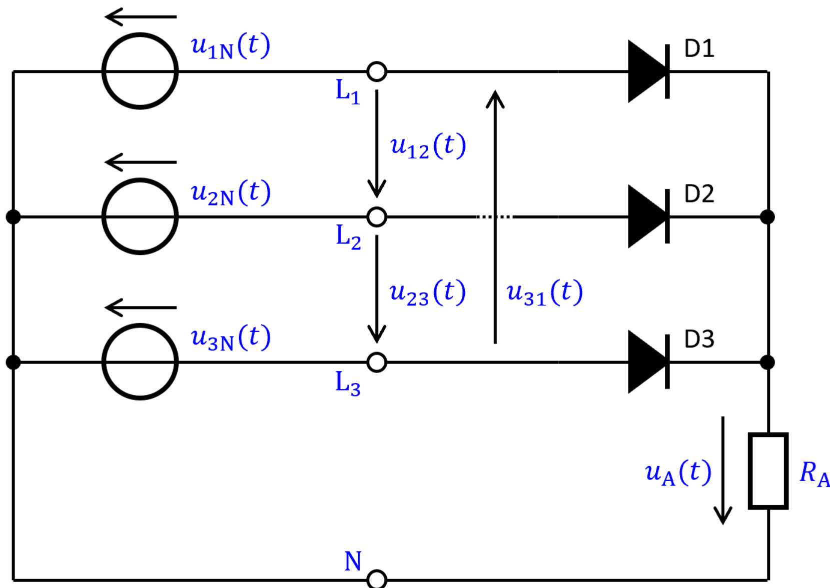
$$\hat{u}_A = \hat{u}_{\curlywedge} \tag{5.12}$$

Maximale Spannung an den Dioden in Sperrrichtung:

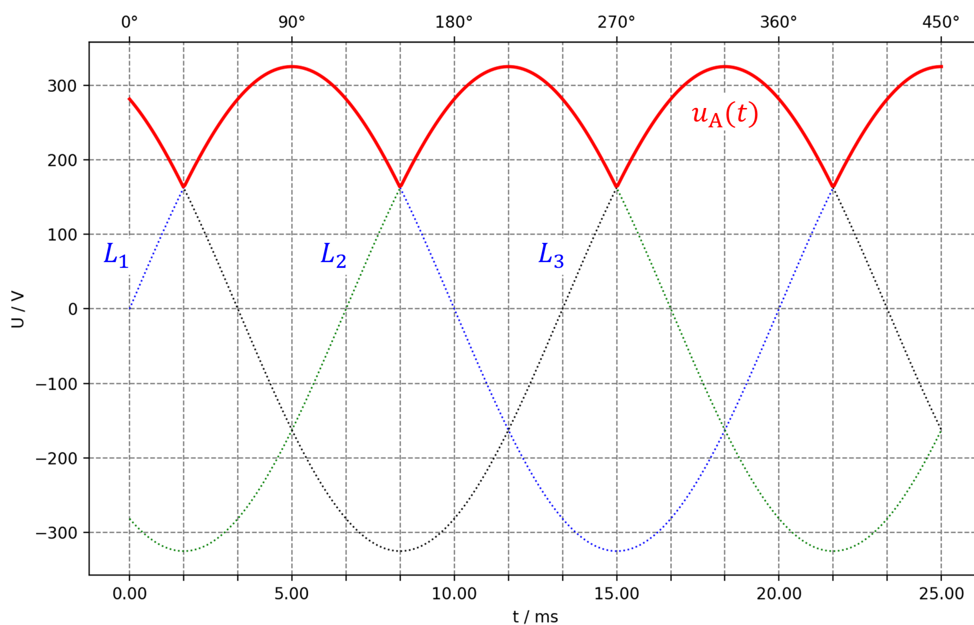
$$\hat{u}_{\mathrm{Sperr}} \approx 1,732 \cdot \hat{u}_{\curlywedge} \tag{5.13}$$

Restwelligkeit, Frequenz (f_0 = Frequenz am Eingang des Gleichrichters):

$$f_{\mathrm{Rest}} = 3 \cdot f_0 \tag{5.14}$$



Die drei Dioden der M3-Schaltung verbinden die positivste der drei Sternspannungen mit der „Oberseite“ des Lastwiderstands R_A. Die „Unterseite“ von R_A ist mit dem Neutralleiter des Drehstromsystems verbunden:

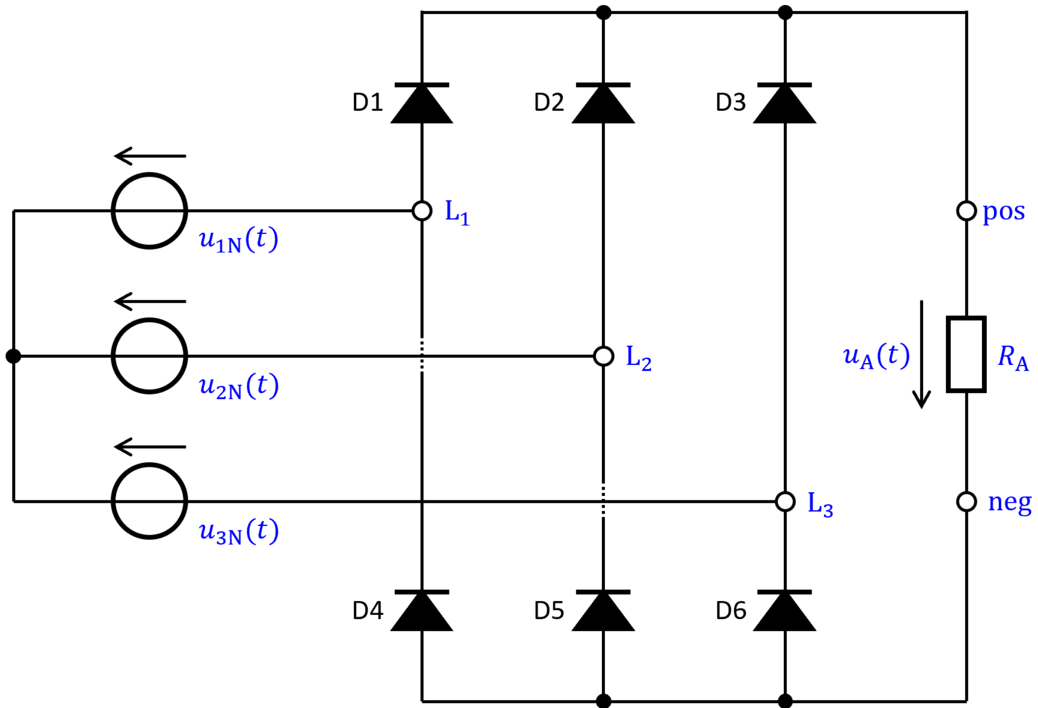


B6-Schaltung, Sechspuls-Brückenschaltung

Die sechs Dioden der B6-Schaltung verbinden den Punkt „pos“ stets mit der positivsten und den Punkt „neg“ mit der negativsten der drei Sternspannungen. Der Lastwiderstand R_A ist zwischen diesen beiden Punkten angeschlossen.

Mittlere Spannung U_A am Lastwiderstand R_A, ohne Glättung:

$$U_A = \overline{u_A(t)} \approx 1,654 \cdot \hat{u}_{\curlywedge} \tag{5.15}$$



Scheitelwert der Ausgangsspannung $u_A(t)$:

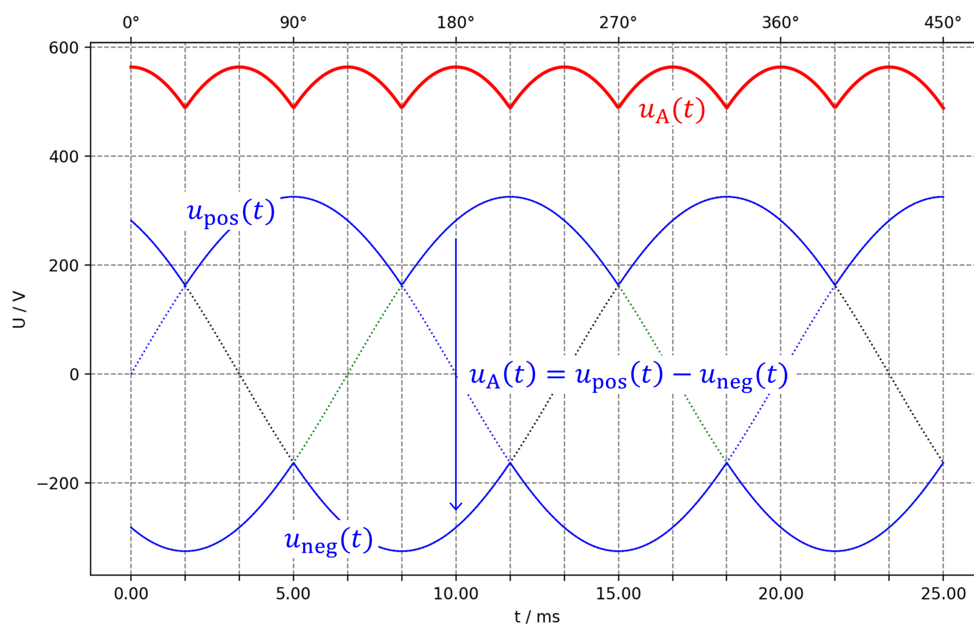
$$\hat{u}_A \approx 1,732 \cdot \hat{u}_{\curlywedge} \tag{5.16}$$

Maximale Spannung an den Dioden in Sperrrichtung:

$$\hat{u}_{Sperr} \approx 1,732 \cdot \hat{u}_{\curlywedge} \tag{5.17}$$

Restwelligkeit, Frequenz (f_0 = Frequenz am Eingang des Gleichrichters):

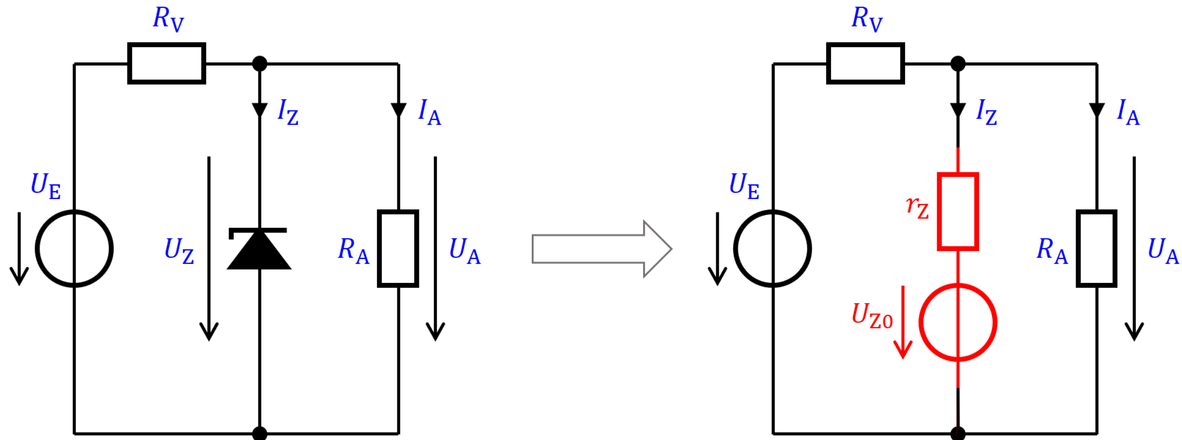
$$f_{Rest} = 6 \cdot f_0 \tag{5.18}$$



Spannungsstabilisierung mittels Z-Diode

Die im Durchbruch betriebene Z-Diode (siehe Ersatzschaltung, Abbildung rechts) hält die Spannung U_A am Lastwiderstand auch bei Veränderung der Eingangsspannung U_E oder des Laststroms I_A nahezu konstant. Folgende Voraussetzungen sind zu beachten:

- Die Z-Diode muss im Durchbruch betrieben werden,
- der maximal zulässige Z-Diodenstrom $I_\mathrm{Z,max}$ darf nicht überschritten werden,
- ein minimaler Z-Diodenstrom $I_\mathrm{Z,min} \approx I_\mathrm{Z,max}/10$ sollte nicht unterschritten werden.



Für den Zusammenhang von I_Z und U_A gilt:

$$U_\mathrm{A} = U_\mathrm{Z} = U_\mathrm{Z0} + I_\mathrm{Z} \cdot r_\mathrm{Z} \tag{5.19}$$

Sind der mögliche Bereich der Eingangsspannung $U_\mathrm{E,min} \dots U_\mathrm{E,max}$ und der mögliche Bereich des Laststroms $I_\mathrm{A,min} \dots I_\mathrm{A,max}$ bekannt, dann kann die zulässige Größe des Vorwiderstands $R_\mathrm{V,min} \dots R_\mathrm{V,max}$ angegeben werden:

$$R_\mathrm{V,min} = \frac{U_\mathrm{E,max} - U_\mathrm{Z0} - I_\mathrm{Z,max} \cdot r_\mathrm{Z}}{I_\mathrm{A,min} + I_\mathrm{Z,max}} \tag{5.20}$$

$$R_\mathrm{V,max} = \frac{U_\mathrm{E,min} - U_\mathrm{Z0} - I_\mathrm{Z,min} \cdot r_\mathrm{Z}}{I_\mathrm{A,max} + I_\mathrm{Z,min}} \tag{5.21}$$

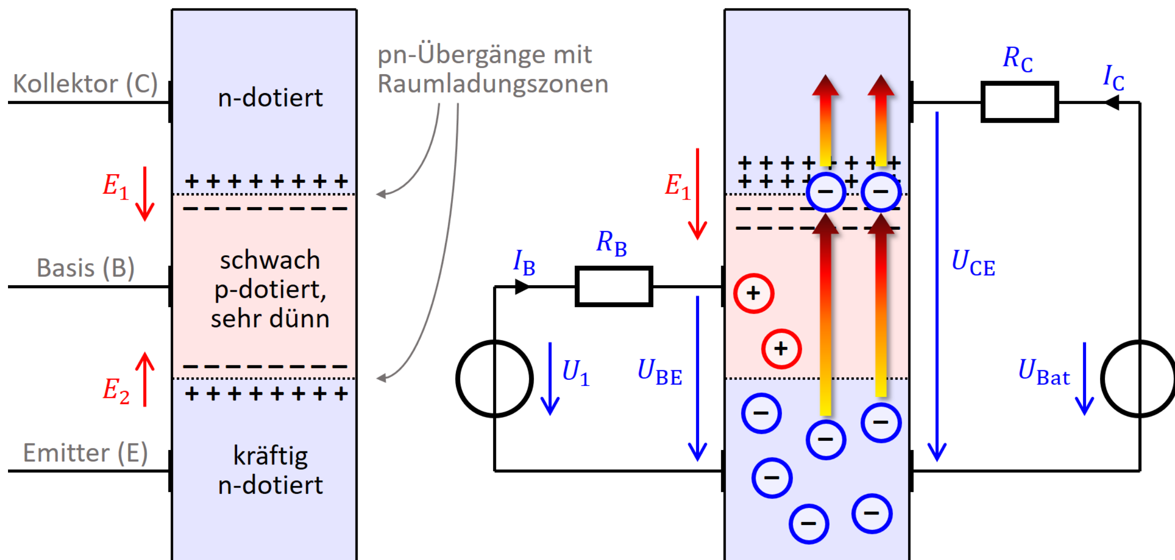
Für den Glättungsfaktor G gilt:

$$G = \frac{\Delta U_\mathrm{E}}{\Delta U_\mathrm{A}} = 1 + R_\mathrm{V} \cdot \left(\frac{1}{r_\mathrm{Z}} + \frac{1}{R_\mathrm{A}} \right) \tag{5.22}$$

Der vergleichsweise große Z-Diodenstrom I_Z führt zu Verlusten an der Z-Diode und insgesamt zu einem sehr niedrigen Wirkungsgrad. Für Verbraucher mit einer Stromaufnahme I_A von mehr als einigen Milliampere, die eine stabilisierte Versorgungsspannung benötigen, sind daher andere Lösungen erforderlich (siehe Anhang B).

6 Bipolartransistoren

Die Abbildung zeigt den Aufbau eines NPN-Bipolartransistors. Die Basis ist sehr dünn ($w_B < 10^{-6}$ m) und im Vergleich zum Emitter nur schwach dotiert: Typische Größenordnungen sind $N_A \approx 10^{17} \ldots 10^{18}\,\text{cm}^{-3}$ in der Basis und $N_D \approx 10^{18} \ldots 10^{19}\,\text{cm}^{-3}$ im Emitter (nach Michael Reisch: „Elektronische Bauelemente“, Springer, 2007).



Solange keine Basis-Emitter-Spannung anliegt ($U_{BE} = 0$ V), kann kein Strom vom Kollektor zum Emitter durch den Transistor fließen; auch nicht in umgekehrter Richtung, da stets einer der beiden pn-Übergänge in Sperrrichtung gepolt ist.

Eine positive Basis-Emitter-Spannung (Abbildung rechts, $U_{BE} \approx 0{,}6$ V) versetzt die „Basis-Emitter-Diode“ in den Durchlassbetrieb. Aus dem kräftig dotierten Emitter strömen viele Elektronen zur Basis. Die Stromstärke hängt exponentiell von der Basis-Emitter-Spannung U_{BE} ab, ähnlich wie bei einer Diode im Durchlassbereich, siehe Gleichung 4.1 (Shockley-Gleichung). Aus der schwach dotierten Basis strömen dagegen nur wenige Löcher zum Emitter, die mit den dortigen Majoritätsträgern rekombinieren und den überwiegenden Teil des (kleinen) Basisstroms I_B ausmachen.

Was geschieht nun mit den vielen freien Elektronen aus dem Emitter in der Basis?

- Manche dieser Elektronen finden in der schwach dotierten Basis einen Rekombinationspartner und verursachen so einen weiteren Teil des Basisstroms I_B. Einzelne Elektronen gelangen ohne zu rekombinieren direkt zum Basisanschluss des Transistors und tragen ebenfalls zum Basisstrom I_B bei.

- Der weitaus größte Teil der Elektronen gelangt in kürzester Zeit über die dünne und schwach dotierte Basis hinweg in das starke elektrische Feld E_1 zwischen Basis und Kollektor, wird aufgrund dieses Feldes sogleich zum Kollektor hin „abgesaugt“ und führt dort zu einem kräftigen Kollektorstrom I_C. Der Kollektorstrom I_C ist typischerweise um den Faktor $B \approx 50 \ldots 250$ größer als der Basisstrom I_B.

Die Größe des Kollektorstroms (des Laststroms) I_C hängt somit exponentiell von der Basis-Emitter-Spannung (der Steuerspannung) U_{BE} ab.

Der Bipolartransistor kann „von außen betrachtet“ als Bauelement angesehen werden, bei dem ein großer Kollektorstrom I_{C} (Laststrom) nahezu proportional von einem kleinen Basisstrom I_{B} (Steuerstrom) abhängt. Das Verhältnis von I_{C} zu I_{B} bezeichnet man als Großsignalverstärkung B (diese einfache Beziehung gilt allerdings nicht für Schalttransistoren, weil diese häufig übersteuert betrieben werden, siehe Seite 16):

$$B = \frac{I_{\mathrm{C}}}{I_{\mathrm{B}}} \tag{6.1}$$

In der Umgebung eines konkreten Arbeitspunkts (also in einer konkreten Schaltung) beschreibt die Kleinsignalverstärkung β die Reaktion des Kollektorstroms ΔI_{C} auf eine Veränderung des Basisstroms ΔI_{B}:

$$\beta = \frac{\Delta I_{\mathrm{C}}}{\Delta I_{\mathrm{B}}} \text{ mit } U_{\mathrm{CE}} = \text{konst.} \tag{6.2}$$

Ebenfalls in der Umgebung eines konkreten Arbeitspunkts beschreibt die Steilheit S die (linearisierte) Reaktion des Kollektorstroms ΔI_{C} auf eine Veränderung der Basis-Emitter-Spannung ΔU_{BE}:

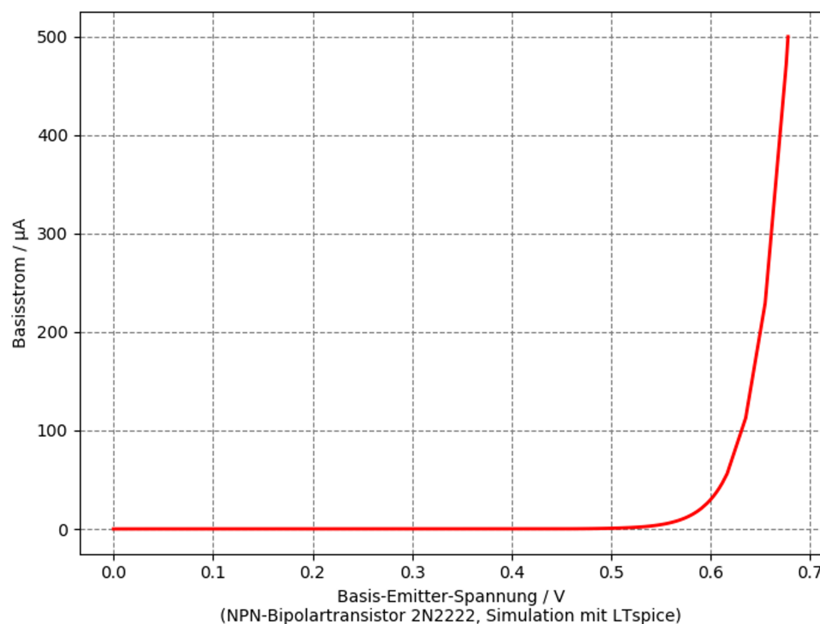
$$S = \frac{\Delta I_{\mathrm{C}}}{\Delta U_{\mathrm{BE}}} = \frac{\beta}{r_{\mathrm{BE}}} \text{ mit } U_{\mathrm{CE}} = \text{konst.} \tag{6.3}$$

Für den differentiellen Basis-Emitter-Widerstand r_{BE} und die Temperaturspannung U_{T} gilt (vergl. Gleichung 4.2):

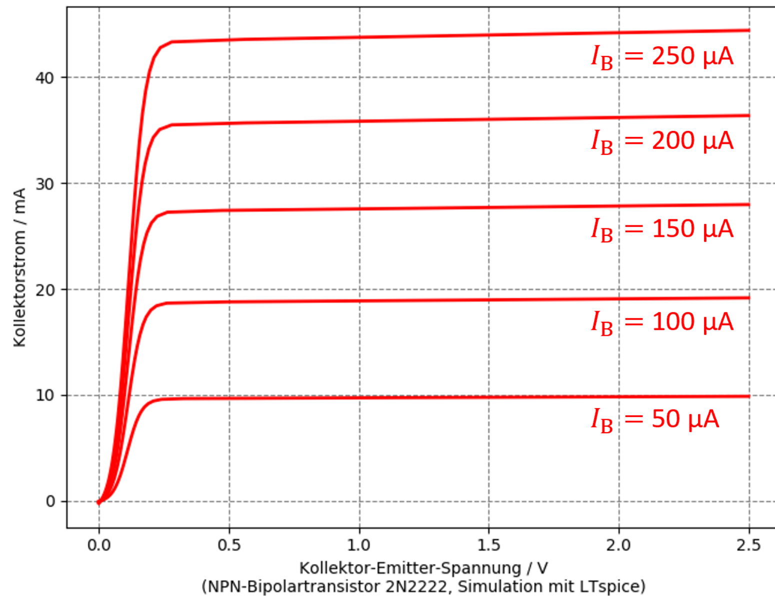
$$r_{\mathrm{BE}} \approx \frac{U_{\mathrm{T}}}{I_{\mathrm{B}}} \text{ mit } U_{\mathrm{T}} = \frac{k \cdot T}{e} \tag{6.4}$$

Transistorkennlinien

Die Eingangskennlinie zeigt das Verhalten der Basis-Emitter-Diode:

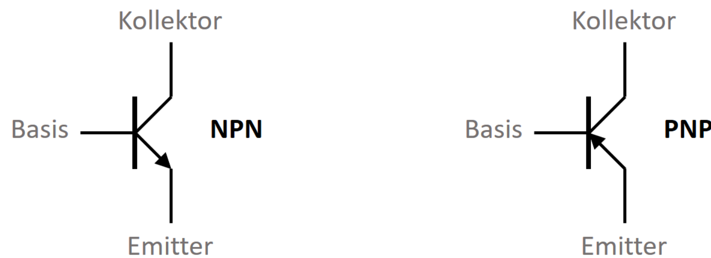


Die horizontalen Ausgangskennlinien zeigen, dass der Kollektorstrom I_C nahezu unabhängig von der Kollektor-Emitter-Spannung U_{CE} ist. Für unterschiedliche Basisströme I_B ergeben sich freilich unterschiedliche Ausgangskennlinien (Gleichung 6.1):



NPN- und PNP-Transistoren

Je nachdem, ob die drei Halbleiterbereiche in der Reihenfolge n-/p-/n-Halbleiter oder in der Reihenfolge p-/n-/p-Halbleiter aufeinander folgen, ergibt sich entweder ein sog. NPN-Transistor oder ein PNP-Transistor.



NPN- und PNP-Transistoren sind sich hinsichtlich ihrer Funktion und der technischen Eigenschaften sehr ähnlich. Die Spannungen zwischen den Transistoranschlüssen haben allerdings umgekehrte Vorzeichen, die Ströme haben umgekehrte Richtungen.

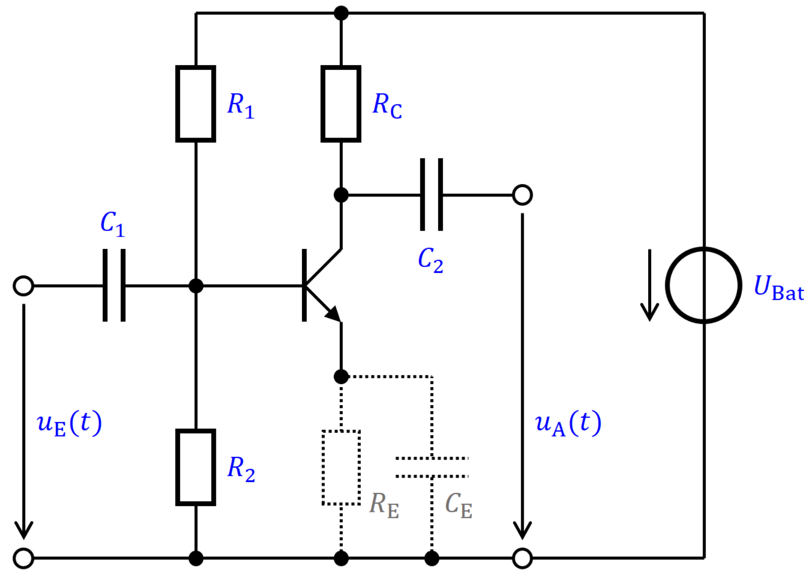
Einstufiger Verstärker für Wechselspannung

Spannungsverstärkung der sog. Emitterschaltung, ohne Last, ohne R_E und C_E:

$$v = -S \cdot R_C = -\frac{\beta}{r_{BE}} \cdot R_C \tag{6.5}$$

Die Verlustleistung P_V führt zur Erwärmung des Transistors:

$$P_V = U_{CE} \cdot I_C + U_{BE} \cdot I_B \approx U_{CE} \cdot I_C \tag{6.6}$$



Der Arbeitspunkt des Verstärkers wird über die Widerstände R_1, R_2 und R_C festgelegt. Man wählt ihn häufig so, dass an R_C die halbe Betriebsspannung ($U_{Bat}/2$) abfällt, solange noch keine Wechselspannung $u_E(t)$ am Eingang angeschlossen ist.

Erwärmt sich der Transistor, so steigt (bei gleicher Ansteuerung an der Basis) der Kollektorstrom I_C. Dadurch verschiebt sich der Arbeitspunkt des Verstärkers. Der Widerstand R_E und der Kondensator C_E wirken dieser Verschiebung entgegen.

Transistoren als Schalter

Wird ein Transistor als Schalter eingesetzt, so ist entweder $I_C \approx 0$ (Schalter geöffnet, kein Strom fließt) oder $U_{CE} \approx 0$ (Schalter geschlossen, Strom fließt). In beiden Fällen fällt kaum Verlustleistung $P_V \approx U_{CE} \cdot I_C$ am Transistor an. Im Moment des Umschaltens ist die Verlustleistung allerdings deutlich größer. Darum ist es wichtig, den Schalttransistor möglichst schnell ein- bzw. auszuschalten.

Zum Einschalten eines Laststroms der Größe $I_{C,ein}$ wird nach Gleichung 6.1 zumindest der Basisstrom $I_{B,min} = I_{C,ein}/B$ benötigt. Häufig lässt man aber mit Absicht einen größeren Basisstrom $I_B = \ddot{u} \cdot I_{B,min}$ fließen, der Transistor ist dann übersteuert.[1] Durch maßvolle Übersteuerung erreicht man schnelle und zuverlässige Schaltvorgänge:[2]

$$\ddot{u} = I_B/I_{B,min} \text{ mit } \ddot{u} \approx 2 \ldots 10 \tag{6.7}$$

Leider lässt sich auch mit großen Basis-Emitter-Spannungen U_{BE} (bzw. großen Basisströmen I_B) eine „Sättigungsspannung“ $U_{CE,sat}$ zwischen Kollektor und Emitter nicht vermeiden bzw. unterschreiten. Dies führt zu Verlusten, wenn der Schalttransistor eingeschaltet ist:

$$P_{V,ein} \approx U_{CE,sat} \cdot I_{C,ein} \tag{6.8}$$

[1] Die einfache Beziehung $I_B = I_C/B$ (Gleichung 6.1) gilt bei Übersteuerung daher nicht mehr.

[2] Die Schaltvorgänge lassen sich durch einen Kondensator parallel zum Basisvorwiderstand („speed-up capacitor“) sowie eine Diode von der Basis zum Kollektor („Baker clamp“) weiter beschleunigen.

7 Feldeffekttransistoren

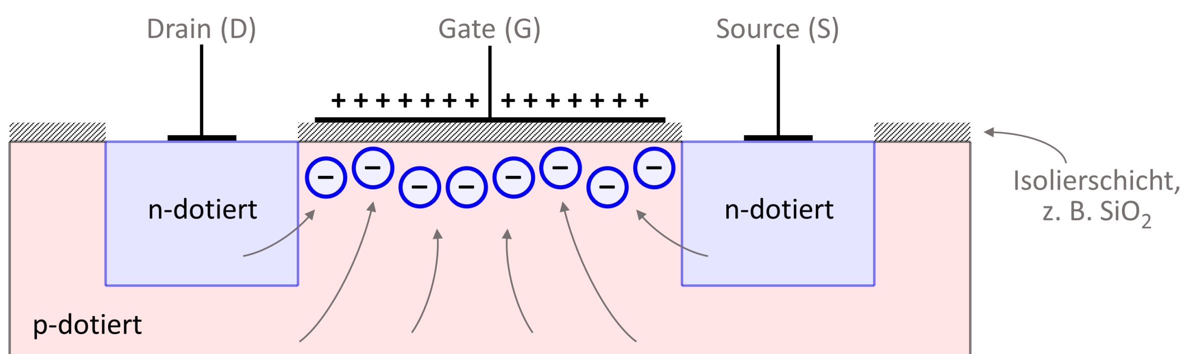
Bei Feldeffekttransistoren wird der Laststrom I_D zwischen Drain und Source über die Gate-Source-Spannung U_GS gesteuert. Im stationären Zustand fließt kein Gatestrom I_G, was eine praktisch leistungslose Ansteuerung ermöglicht. Ändert sich die Gate-Source-Spannung – zum Beispiel beim Umschalten eines Schalttransistors – treten allerdings Ladeströme am Gate auf, ähnlich wie bei einem Kondensator.

Wichtige Mitglieder in der Familie der Feldeffekttransistoren sind der MOSFET (Metal Oxide Semiconductor Field Effect Transistor, Isolierschicht-Feldeffekttransistor) und der JFET (Junction Field Effect Transistor, Sperrschicht-Feldeffekttransistor). Auf dem Markt sind p-Kanal-MOSFETs als Verarmungstypen nicht in Form von Einzelbauelementen erhältlich, man findet sie aber innerhalb von integrierten Schaltungen.

	Anreicherungs-MOSFET	Verarmungs-MOSFET	JFET
n-Kanal	Drain, Gate, Source	Drain, Gate, Source	Drain, Gate, Source
p-Kanal	Drain, Gate, Source	Drain, Gate, Source	Drain, Gate, Source

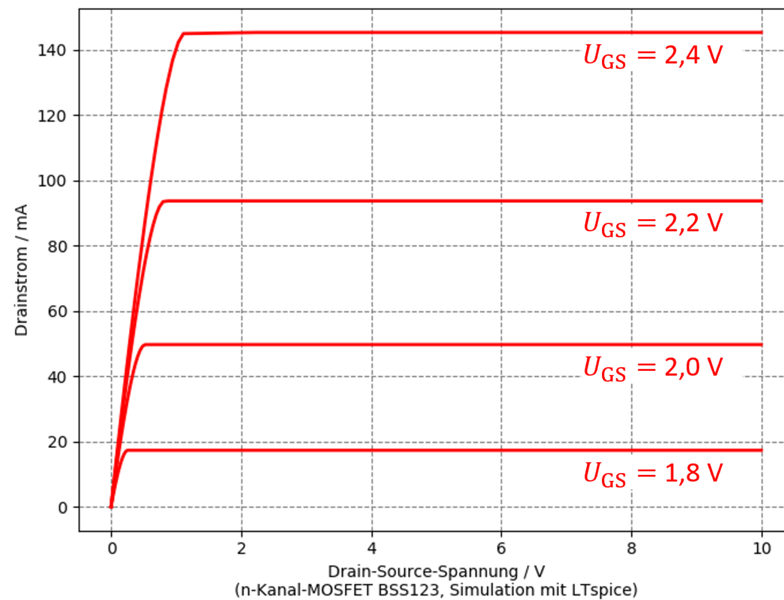
Aufbau und Kennlinien

Die folgende Abbildung zeigt den Aufbau eines n-Kanal-MOSFETs (Anreicherungstyp). Wird die Gate-Elektrode durch Anschluss einer geeigneten Spannungsquelle positiv aufgeladen, baut sich im Bereich unterhalb des Gates ein elektrisches Feld auf. Dadurch wirken Kräfte auf die Ladungsträger im p-Halbleiter. Aufgrund der sehr dünnen Isolierschicht unterhalb des Gates sind die elektrische Feldstärke und damit auch die dort wirkenden Kräfte hoch (vergl. Plattenkondensator: $E = U/d$).



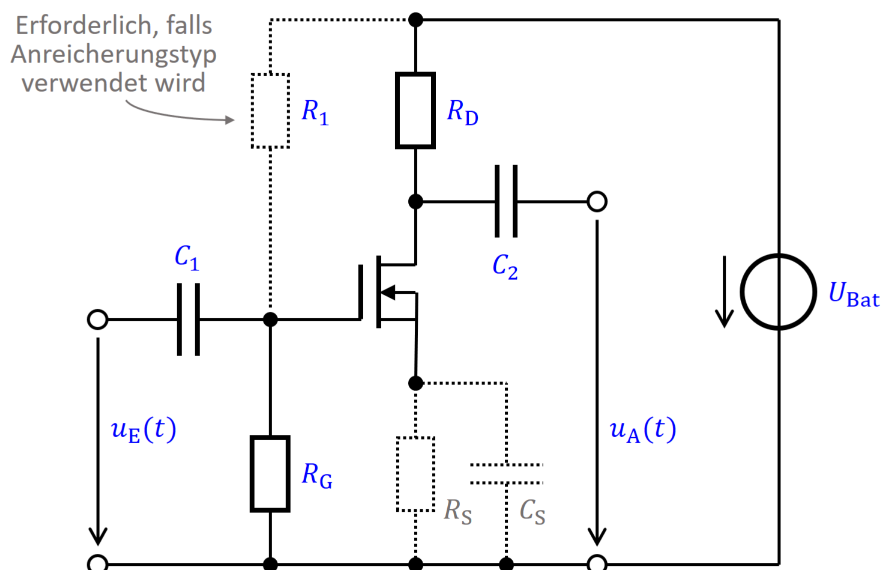
Die wenigen freien Elektronen im p-Halbleiter sammeln sich daher direkt unterhalb der Isolierschicht, hinzu kommen weitere Elektronen aus den Drain- und Source-Regionen. Die vielen beweglichen Löcher werden dagegen nach unten abgestoßen.

Im p-Halbleiter gibt es üblicherweise viele Löcher und nur wenige freie Elektronen. Unterhalb des Gates ist dies aufgrund des starken elektrischen Felds umgekehrt. Es scheint, als hätte sich dort der p-Halbleiter in einen n-Halbleiter umgewandelt (sog. Inversion). Die beiden pn-Übergänge zu Source und Drain verlieren ihre (sperrende) Wirkung, Stromfluss zwischen Drain und Source ist jetzt möglich.



Der Drainstrom (Laststrom) I_D hängt von der Gate-Source-Spannung (Steuerspannung) U_{GS} ab. Die Drain-Source-Spannung U_{DS} hat dagegen kaum Einfluss auf den Drainstrom (nur bei kleinen Werten von U_{DS}, ansonsten horizontale Kennlinien).

Einstufiger Verstärker für Wechselspannung



Spannungsverstärkung der sog. Sourceschaltung, ohne Last, ohne R_S und C_S:

$$v = -S \cdot R_D \tag{7.1}$$

Auch bei Feldeffekttransistoren beschreibt die Steilheit S die (linearisierte) Reaktion des Ausgangsstroms (hier ΔI_D) auf eine Eingangsspannungsänderung (hier ΔU_{GS}):

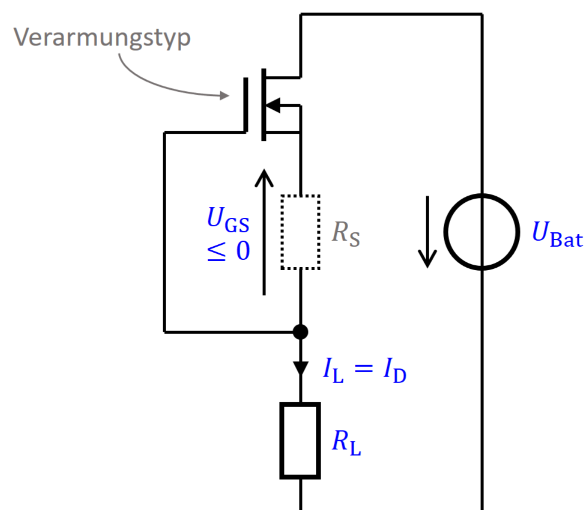
$$S = \frac{\Delta I_D}{\Delta U_{GS}} \text{ mit } U_{DS} = \text{konst.} \tag{7.2}$$

Für die Verlustleistung P_V am Feldeffekttransistor gilt:

$$P_V = U_{DS} \cdot I_D \tag{7.3}$$

Konstantstromquelle

Bei Verarmungstyp-MOSFETs und bei JFETs fließt bereits bei $U_{GS} = 0$ ein gewisser Drainstrom I_{D0}. Dies kann genutzt werden, um Konstantstromquellen aufzubauen. Das Funktionsprinzip, hier an einem n-Kanal-MOSFET gezeigt: Eine konstante Gate-Source-Spannung $U_{GS} \leq 0$ bewirkt einen konstanten Drain- bzw. Laststrom $I_D = I_L$.



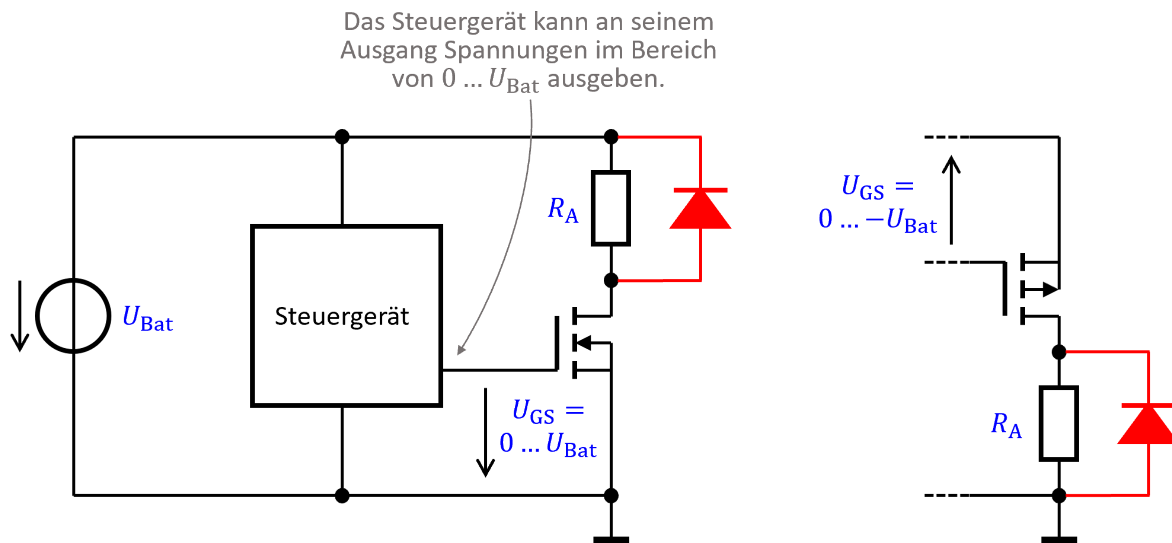
Bei der Dimensionierung der Konstantstromquelle wird zunächst der gewünschte Laststrom $I_L \leq I_{D0}$ festgelegt. Aus den Transistorkennlinien folgt die dafür notwendige Gate-Source-Spannung $U_{GS} \leq 0$. Nun kann der Widerstand $R_S = -U_{GS}/I_L$ angegeben werden.

Der Widerstand R_S kann auch entfallen bzw. durch eine Drahtbrücke ersetzt werden ($R_S = 0$). Dadurch hat die Gate-Source-Spannung immer den Wert $U_{GS} = 0$, der Laststrom nimmt in diesem Fall den Wert $I_L = I_{D0}$ an.

High-Side- und Low-Side-Schalter

Ein MOSFET, der einen Verbraucher (Lastwiderstand R_A) ein- und ausschalten soll, kann unterhalb (Abbildung links, sog. Low-Side-Schalter) oder oberhalb (Abbildung rechts, sog. High-Side-Schalter) von R_A angeschlossen werden.

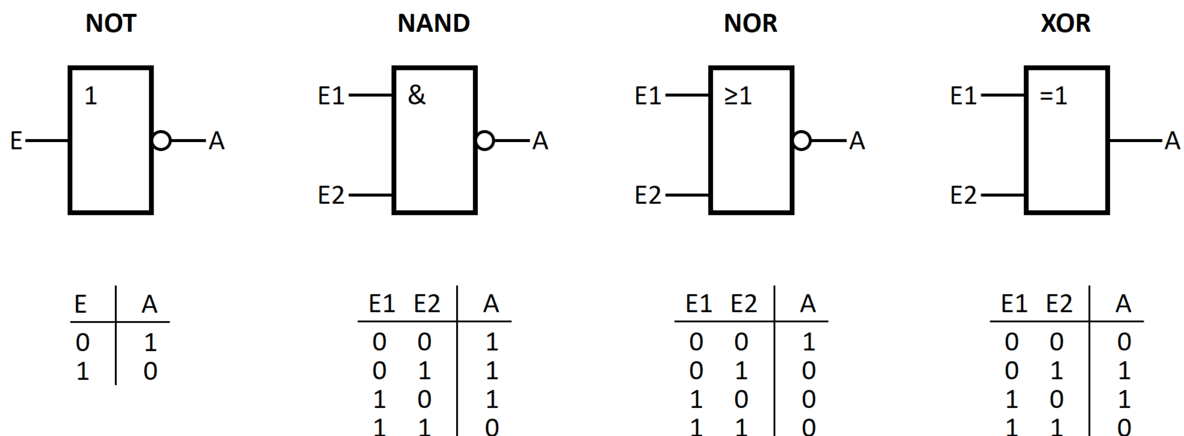
Wenn als Low-Side-Schalter ein n-Kanal-MOSFET bzw. als High-Side-Schalter ein p-Kanal-MOSFET eingesetzt wird, hat die Gate-Source-Spannung U_{GS} das korrekte Vorzeichen, der Anschluss des Transistors an das Steuergerät ist dann besonders einfach. Bei High-Side-Schaltern kann die „Unterseite" von R_A direkt mit der Schaltungsmasse verbunden werden, im Kfz zum Beispiel mit der Karosserie, was oft vorteilhaft ist.



Soll anstelle von R_A eine induktive Last geschaltet werden, zum Beispiel ein Motor, Relais oder Hubmagnet, dann ist eine sog. Freilaufdiode erforderlich (hier rot dargestellt). Ansonsten kann es beim Abschalten zur Beschädigung des Transistors kommen.

8 Schaltungen der Digitaltechnik

Boolesche Funktionen



E	A
0	1
1	0

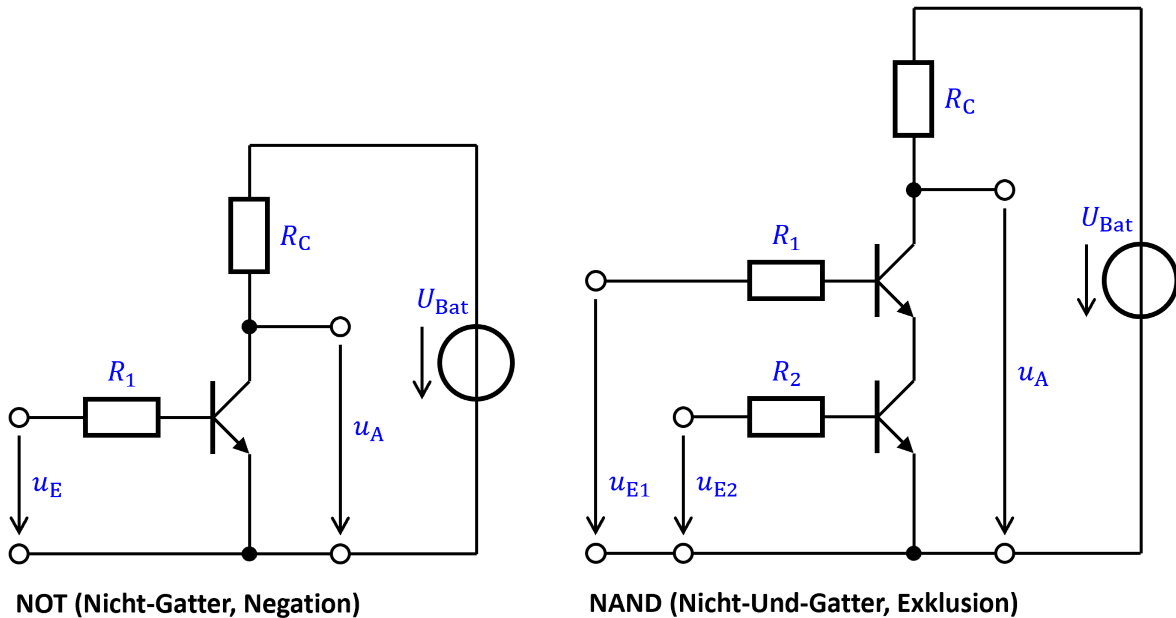
E1	E2	A
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

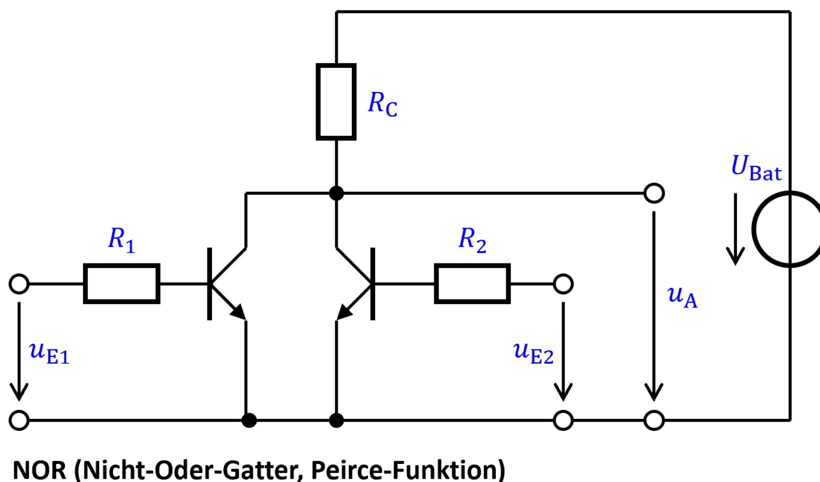
E1	E2	A
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

E1	E2	A
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Widerstands-Transistor-Logik

Digitalschaltungen zur Realisierung Boolescher Funktionen können bereits mit wenigen Widerständen und Transistoren aufgebaut werden (Widerstands-Transistor-Logik, engl. Resistor Transistor Logic, RTL):

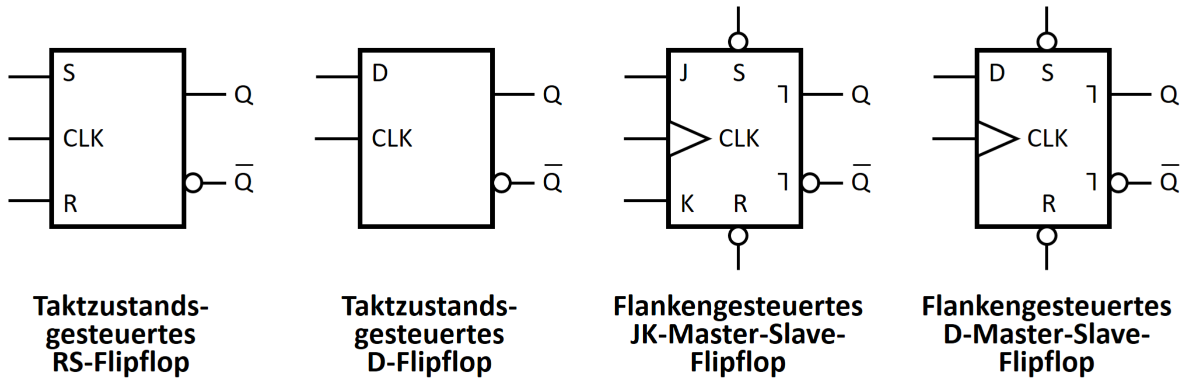




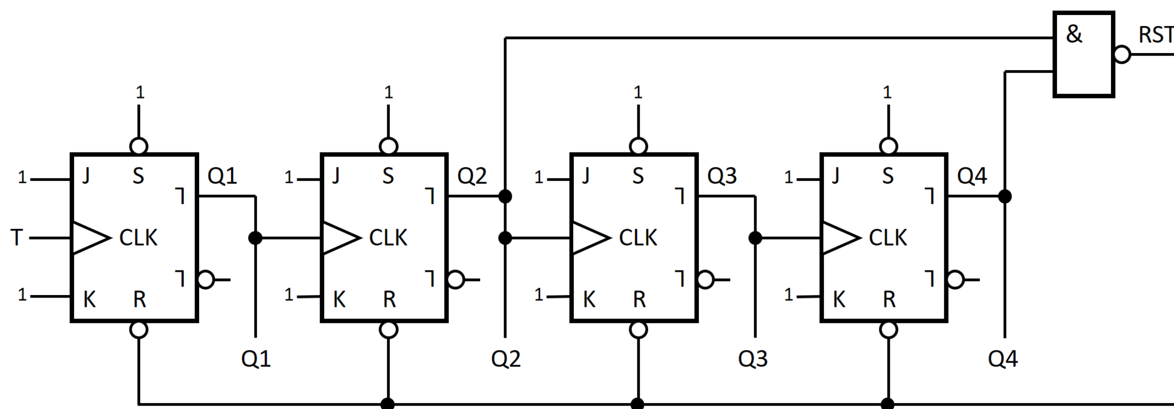
Der für die bemannten Mondlandungen der NASA entwickelte Apollo Guidance Computer basierte auf dieser Technologie. Widerstands-Transistor-Logik ist jedoch vergleichsweise langsam und zudem durch eine hohe Leistungsaufnahme gekennzeichnet. Sie wird heute nicht mehr eingesetzt.

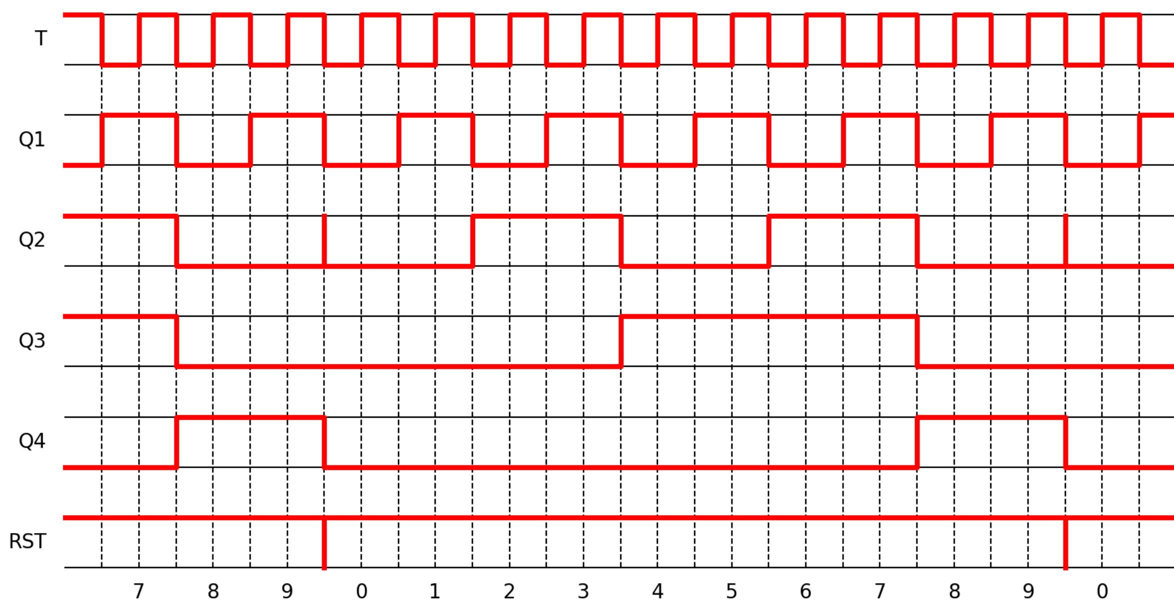
Boolesche Funktionen in aktuellen Schaltungen sind oft in HC/HCT-Logik (High-Speed CMOS, Taktfrequenzen bis $f_C \approx 40\,\text{MHz}$) oder AC/ACT-Logik (Advanced High-Speed CMOS, Taktfrequenzen bis $f_C \approx 100\,\text{MHz}$) ausgeführt. Für niedrige Betriebsspannungen ab $U_{Bat} = 1{,}65\,\text{V}$ bis max. $U_{Bat} = 5{,}5\,\text{V}$ eignet sich LVC-Logik (Low Voltage CMOS). Komplexere Digitalschaltungen werden mit schnellen FPGAs (Field Programmable Gate Arrays) oder mit Mikrocontrollern realisiert, siehe Anhang A.

Flipflops, Speicherelemente

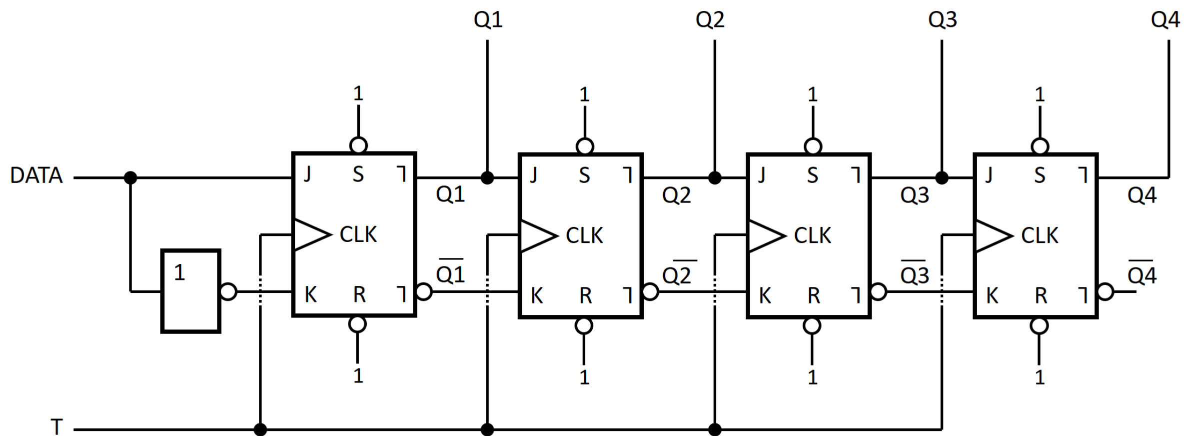


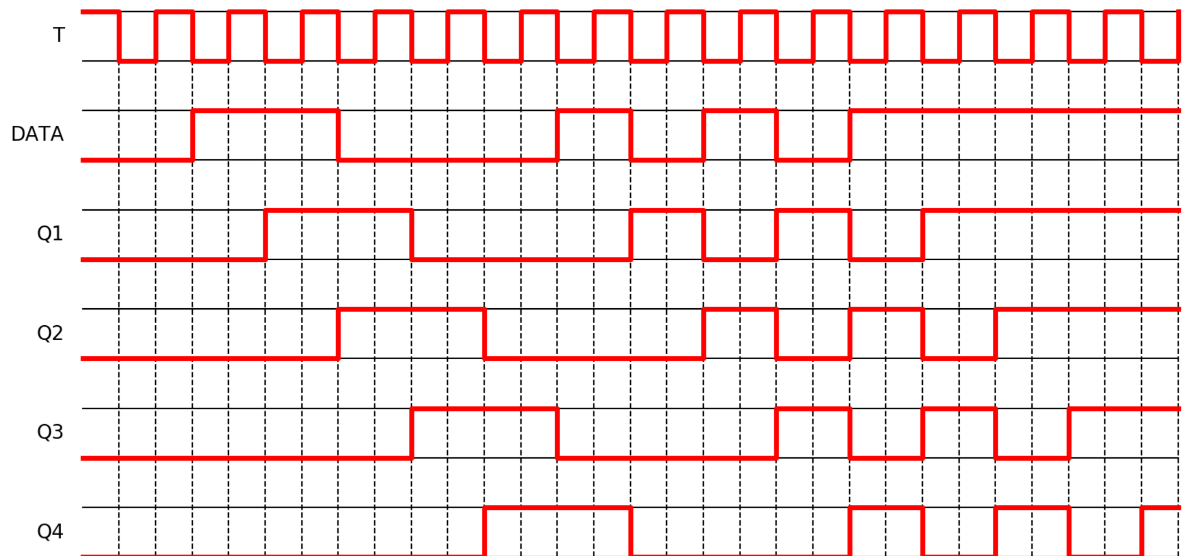
BCD-Zähler (0...9)



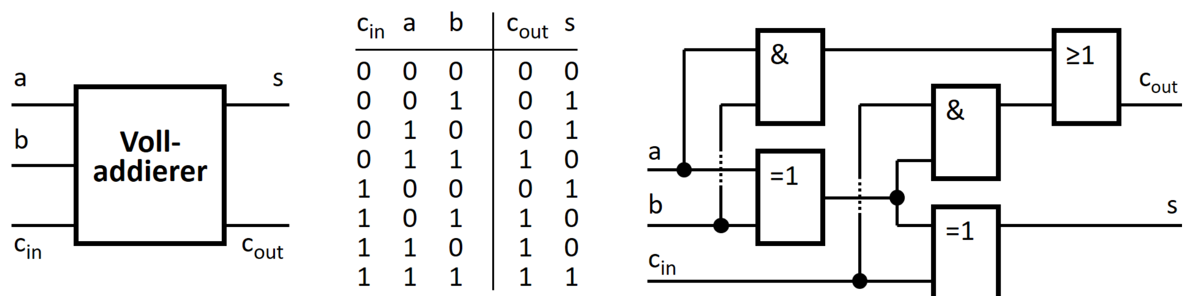


Schieberegister



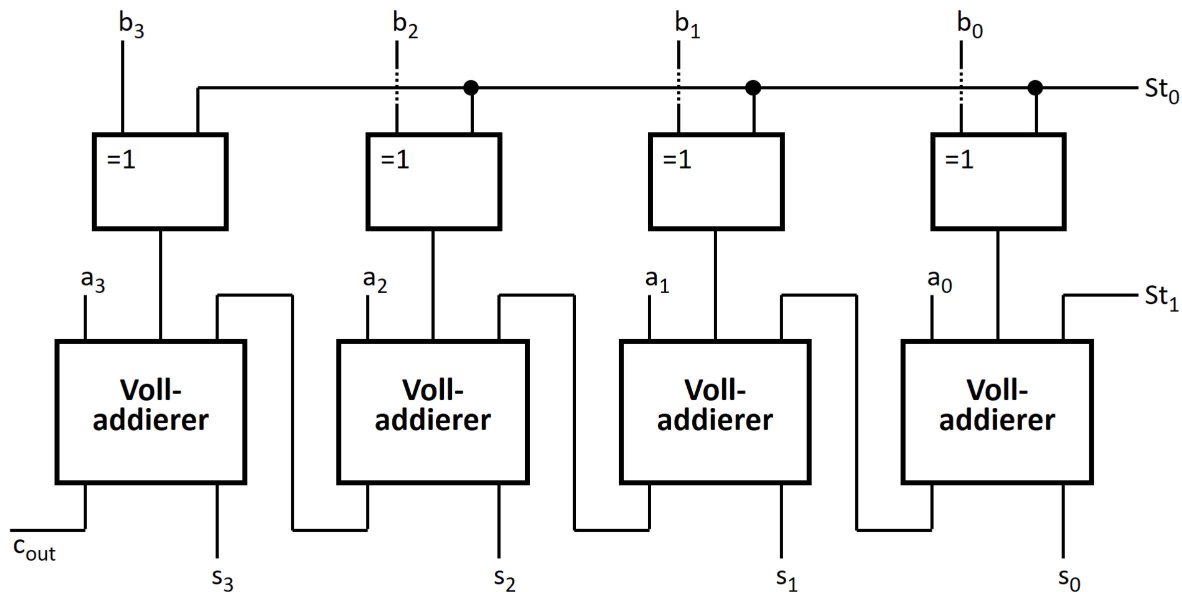


Addier-/Subtrahierwerk



c_{in}	a	b	c_{out}	s
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

Die folgende Abbildung zeigt ein Addier-/Subtrahierwerk für vierstellige Binärzahlen. Wenn die Steuerleitungen St_0 und St_1 nicht gesetzt sind ($St_0 = St_1 = 0$), gelangen die vier Bits der Zahl b unverändert an die Eingänge der Volladdierer. So wird die Summe von a und b berechnet.



Die Berechnung der Differenz $a - b$ geschieht durch Addition des Zweierkomplements von b zur Zahl a. Zur Bildung des Zweierkomplements müssen alle Bits von b invertiert ($St_0 = 1$) und außerdem das Ergebnis um 1 erhöht werden ($St_1 = 1$).

Digitalrechner, Befehlszyklus

Digitalrechner führen Maschinenbefehle aus, die im Festwertspeicher (Read-Only Memory, ROM) oder im Arbeitsspeicher (Random-Access Memory, RAM) stehen. Das folgende Beispiel zeigt den Befehlszyklus, der immer wieder durchlaufen wird:

An Adresse 1000 steht der Maschinenbefehl 128 („ADD A,B“ – Inhalt des Registers B zum Register A hinzuaddieren). Im Befehlszähler ist die Adresse 1000 gespeichert. Der Additionsbefehl ist somit der nächste auszuführende Maschinenbefehl.

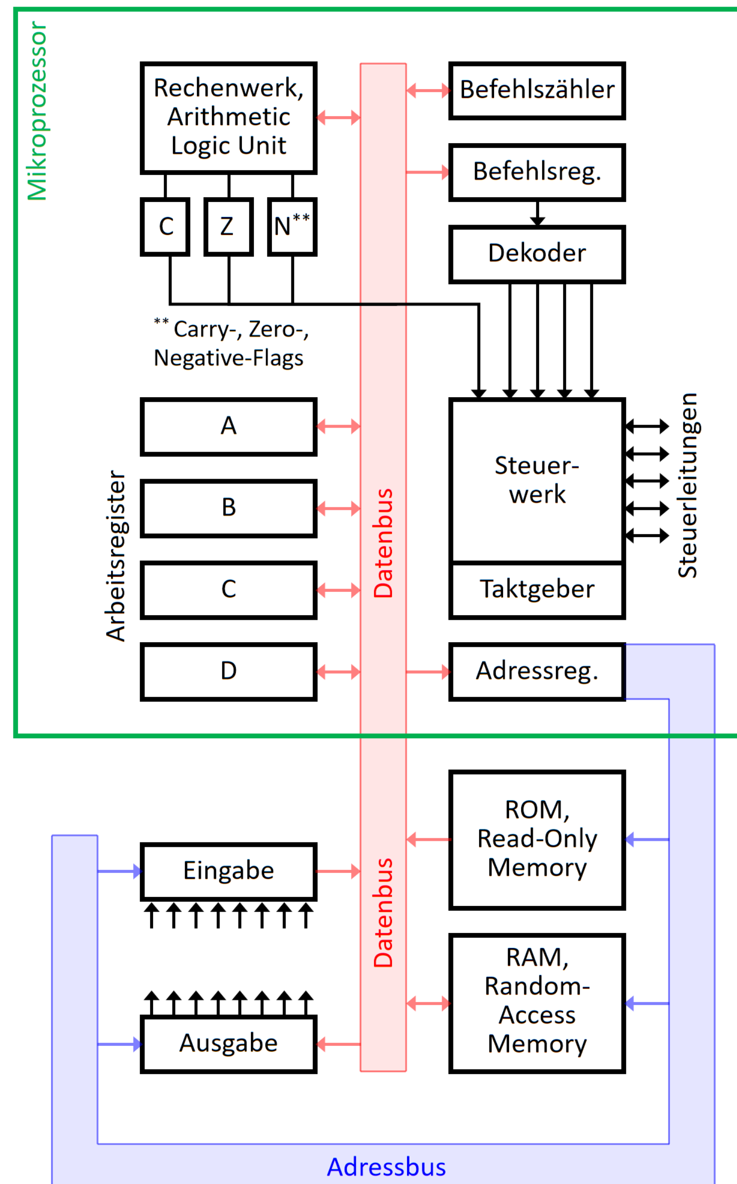
1. Das Steuerwerk kopiert den Inhalt des Befehlszählers (1000) ins Adressregister. Dadurch wird die Adresse 1000 auf dem Adressbus außerhalb des Mikroprozessors sichtbar.

2. Der Speicherbaustein, in dem sich die Speicherzelle mit der Adresse 1000 befindet, legt den Inhalt dieser Speicherzelle (128) auf den Datenbus.

3. Der Befehlscode (128) wird vom Mikroprozessor ins Befehlsregister übernommen und vom Dekoder analysiert.

4. Das Steuerwerk veranlasst die eigentliche Befehlsausführung. Die Inhalte der Register A und B werden an die Eingänge des Rechenwerks gelegt, die Addition vom Rechenwerk durchgeführt, das Ergebnis wieder im Register A gespeichert.

5. Nach der Ausführung des Befehls wird der Befehlszähler inkrementiert, der Befehlszyklus beginnt von vorne.



9 Schaltungen der Leistungselektronik

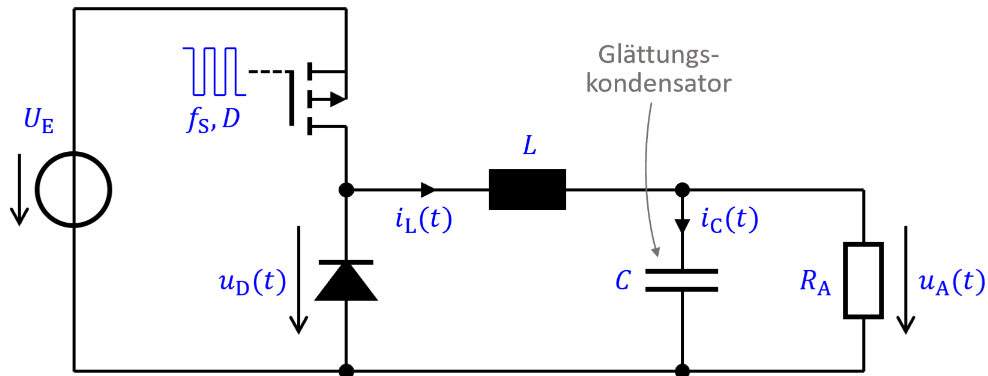
Abwärtswandler

Der Abwärtswandler (engl. step-down converter, buck converter) wird eingesetzt, um eine bestimmte Ausgangsspannung U_A aus einer höheren Eingangsspannung U_E zu gewinnen. Der Schalttransistor wird mit hoher Frequenz f_S ein- und ausgeschaltet, für den Mittelwert der Ausgangsspannung U_A gilt (bei idealen Bauelementen):

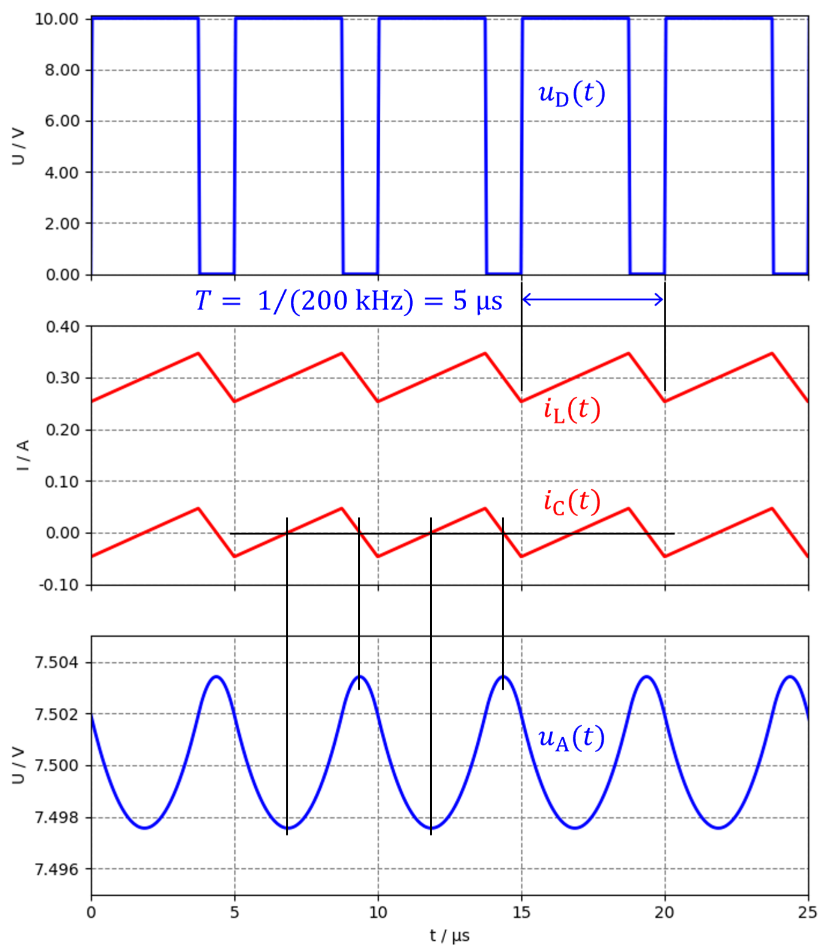
$$U_\mathrm{A} = U_\mathrm{E} \cdot D \tag{9.1}$$

$D = 0 \ldots 1$ ist der Tastgrad, mit dem der Schalttransistor betrieben wird.

Die Schaltfrequenz hat keinen Einfluss auf den Mittelwert der Ausgangsspannung U_A, höhere Frequenzen f_S führen jedoch zu geringerer Restwelligkeit (engl. Ripple). Durchlassverluste an Schalttransistor und Diode sowie ohmsche Verluste in der Spule haben in der Praxis eine etwas kleinere Ausgangsspannung zur Folge als in 9.1 angegeben.



Die folgende Abbildung zeigt die Spannung $u_D(t)$ unterhalb des Schalttransistors, den Spulenstrom $i_L(t)$, den Strom am Glättungskondensator $i_C(t)$ und die Ausgangsspannung $u_A(t)$ bei $f_S = 200\,\text{kHz}$ und einem Tastgrad von $D = 0,75$ (idealer Schalttransistor, ideale Diode, $C = 10\,\mu\text{F}$, $L = 100\,\mu\text{H}$, $R_A = 25\,\Omega$, $U_E = 10\,\text{V}$):



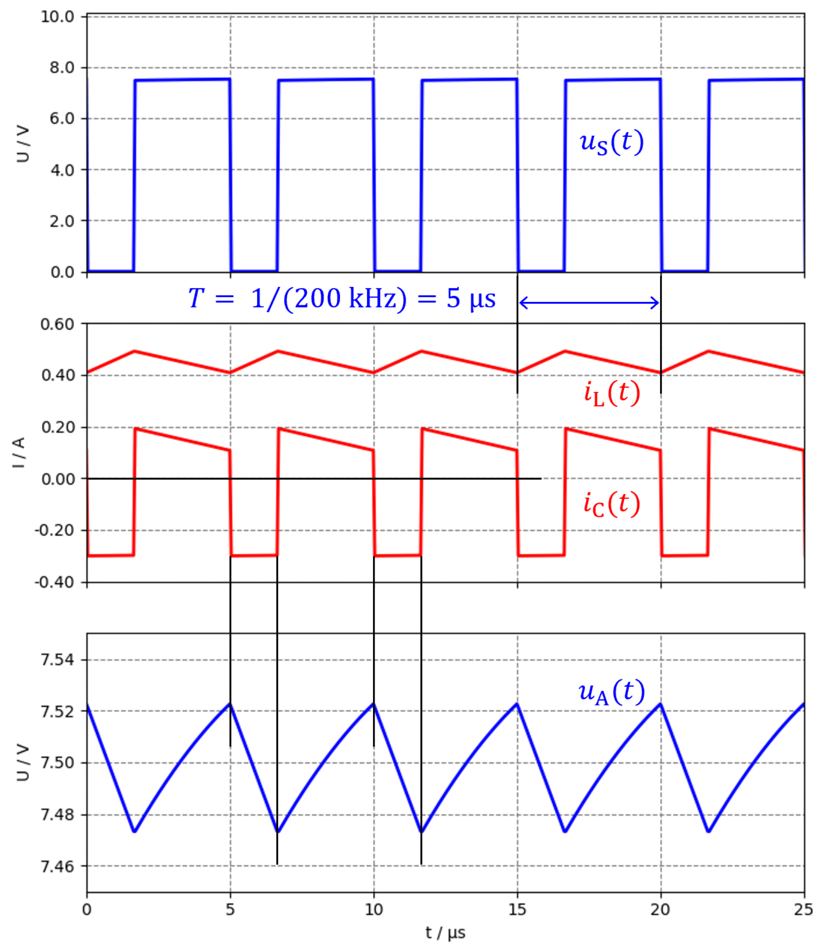
Aufwärtswandler

Der Aufwärtswandler (engl. step-up converter, boost converter) wird eingesetzt, um eine bestimmte Ausgangsspannung U_A aus einer niedrigeren Eingangsspannung U_E zu gewinnen. Der Schalttransistor wird mit hoher Frequenz f_S ein- und ausgeschaltet, für den Mittelwert der Ausgangsspannung U_A gilt (bei idealen Bauelementen):

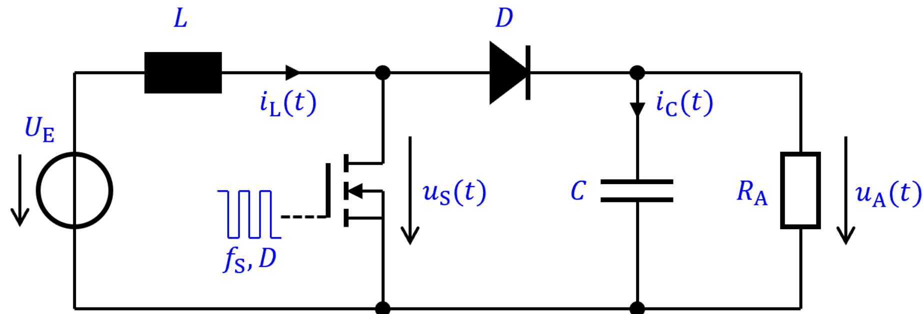
$$U_A = U_E \cdot \frac{1}{1 - D} \tag{9.2}$$

$D = 0...1$ ist der Tastgrad, mit dem der Schalttransistor betrieben wird.

Die folgende Abbildung zeigt die Spannung über dem Schalttransistor $u_S(t)$, den Spulenstrom $i_L(t)$, den Strom am Glättungskondensator $i_C(t)$ und die Ausgangsspannung $u_A(t)$ bei $f_S = 200\,\text{kHz}$ und einem Tastgrad von $D = 0,33$ (ideale Diode, idealer Schalttransistor, $C = 10\,\mu\text{F}$, $L = 100\,\mu\text{H}$, $R_A = 25\,\Omega$, $U_E = 5\,\text{V}$, vergl. Anhang D):



Wie schon beim Abwärtswandler hat die Schaltfrequenz keinen Einfluss auf den Mittelwert der Ausgangsspannung U_A, höhere Frequenzen f_S führen wiederum zu geringerer Restwelligkeit. Durchlassverluste an Schalttransistor und Diode sowie ohmsche Verluste in der Spule haben auch beim Aufwärtswandler in der Praxis eine etwas kleinere Ausgangsspannung zur Folge als in 9.2 angegeben.



Wichtige Hinweise:

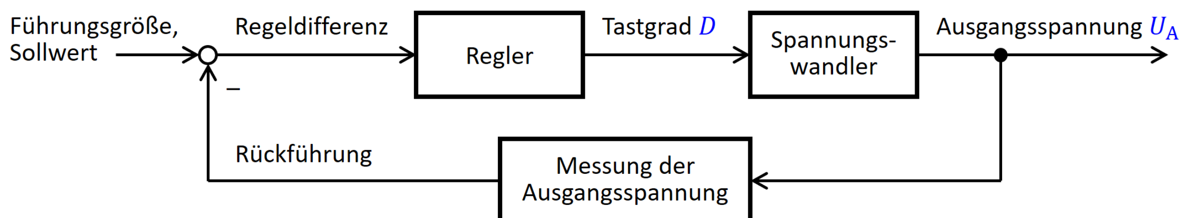
- Der Aufwärtswandler ist nicht kurzschlussfest. Bei einem Kurzschluss am Ausgang wird der Anstieg des Spulenstroms $i_L(t)$ nur durch die (geringen) ohmschen Verluste in der Spule und die Durchlassverluste in der Diode begrenzt. Bauteile können zerstört werden.

- Wird der Aufwärtswandler mit einem konstanten Tastgrad aber ohne Last betrieben ($R_A \to \infty$), so wird in jedem Schaltzyklus zusätzliche Energie von der Spule auf den Kondensator übertragen. Die Kondensatorspannung steigt immer weiter an. Auch in diesem Fall können Bauteile zerstört werden.

- Wird die Induktivität L oder die Frequenz f_S verringert, so vergrößert sich die Schwankung des Spulenstroms $i_L(t)$. Je nach Größe von R_A kann es sogar vorkommen, dass $i_L(t)$ regelmäßig bis auf null absinkt. Dies gilt sowohl für Abwärts- als auch für Aufwärtswandler. Man spricht vom „lückenden Betrieb“ des Wandlers, die einfachen Beziehungen 9.1 bzw. 9.2 gelten in diesem Fall nicht mehr.

Geregelte Spannungswandler

Die Angabe eines konkreten (konstanten) Tastgrads D zur Erzeugung einer Ausgangsspannung U_A in einem genau festgelegten Bereich, zum Beispiel $U_A = 4{,}5 \ldots 5{,}5\,\mathrm{V}$, ist in der Praxis oft schwierig oder gar unmöglich. Gründe hierfür sind eine nicht-konstante Eingangsspannung U_E aus Batterien oder Akkumulatoren, Verluste an nicht-idealen Bauelementen im Schaltregler selbst sowie Rückwirkungen, falls sich die Belastung am Ausgang des Spannungswandlers ändert.



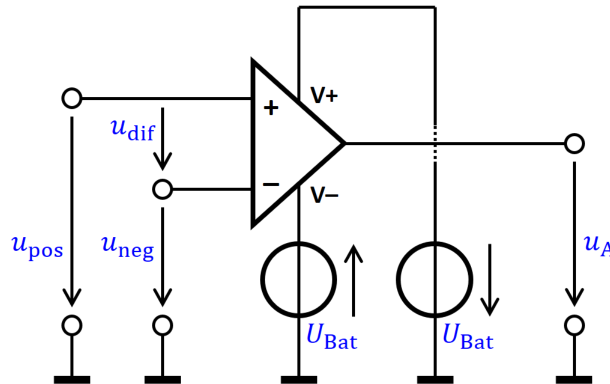
Aus diesem Grund werden häufig geregelte Spannungswandler eingesetzt: Die Ausgangsspannung U_A wird permanent überwacht, bei Abweichungen vom Sollwert sorgt ein Regler für die Korrektur des Tastgrads D.

10 Operationsverstärker

Für die Ausgangsspannung u_A eines Operationsverstärkers gilt grundsätzlich:

$$u_A = v_0 \cdot u_{dif} = v_0 \cdot (u_{pos} - u_{neg}) \tag{10.1}$$

Die Leerlaufverstärkung v_0 liegt typischerweise im Bereich $10.000 < v_0 < 1.000.000$. Im Übrigen kann u_A nicht kleiner als die negative Versorgungsspannung V- und nicht größer als die positive Versorgungsspannung V+ werden.



Um den Entwurf bzw. die Analyse von Operationsverstärkerschaltungen zu erleichtern, werden „ideale“ Operationsverstärker mit folgenden Eigenschaften angenommen:

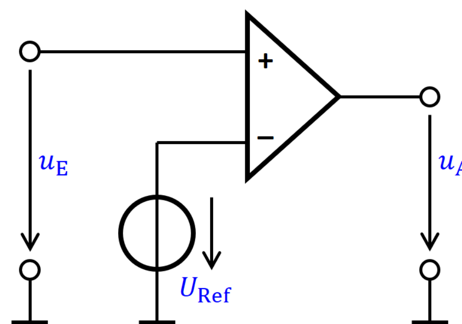
1. Die Leerlaufverstärkung ist sehr groß ($v_0 \to \infty$),
2. in die beiden Eingänge fließt kein Strom,
3. die Spannung u_A ist unabhängig von der Belastung des Ausgangs.

Operationsverstärker als Komparator

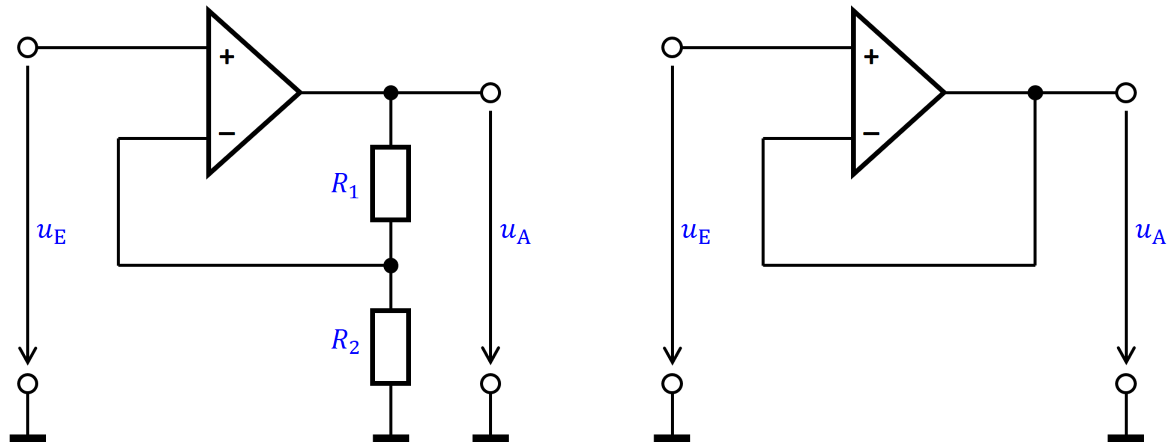
Unterschiedliche Spannungen an den beiden Eingängen führen aufgrund der großen Leerlaufverstärkung v_0 zur Übersteuerung des Operationsverstärkers. Am Ausgang steht dann ständig die maximal mögliche ($U_{A,max}$) oder die minimal mögliche Ausgangsspannung ($U_{A,min}$) an. Dies kann genutzt werden, um Spannungen zu vergleichen:

$$u_A = U_{A,max} \text{ falls } u_E > U_{Ref} \tag{10.2}$$

$$u_A = U_{A,min} \text{ falls } u_E < U_{Ref} \tag{10.3}$$



Nichtinvertierender Verstärker, Impedanzwandler



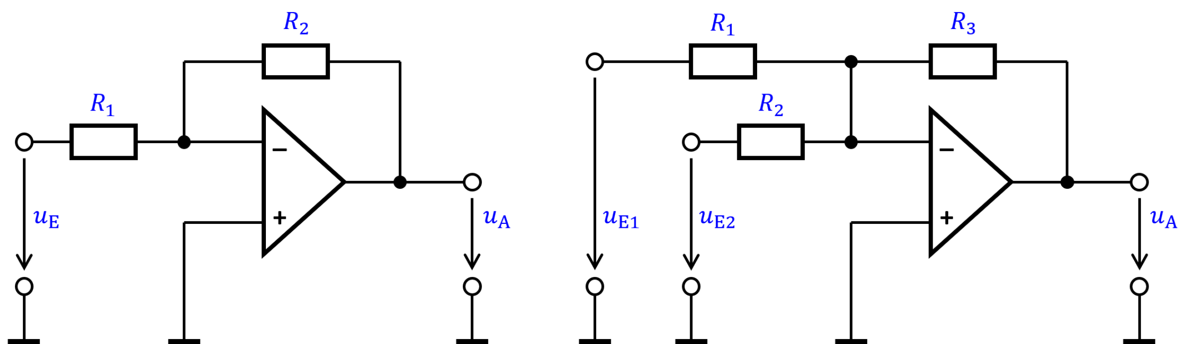
Nichtinvertierender Verstärker (Abbildung links):

$$u_A = \frac{R_1 + R_2}{R_2} \cdot u_E = \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) \cdot u_E \tag{10.4}$$

Der Impedanzwandler (Abbildung rechts) kann als Spezialfall eines nichtinvertierenden Verstärkers mit $R_1 = 0$ und $R_2 \to \infty$ aufgefasst werden:

$$u_A = u_E \tag{10.5}$$

Invertierender Verstärker, invertierender Addierer



Invertierender Verstärker (Abbildung links):

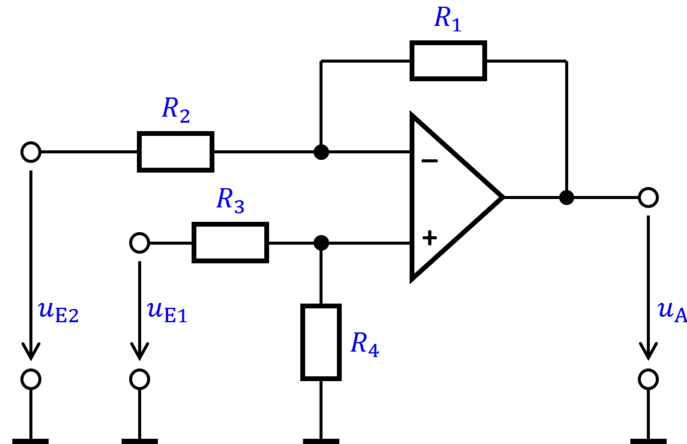
$$u_A = -\frac{R_2}{R_1} \cdot u_E \tag{10.6}$$

Der invertierende Addierer (Abbildung rechts) ist ein invertierender Verstärker mit mehreren Eingängen:

$$u_A = -R_3 \cdot \left(\frac{u_{E1}}{R_1} + \frac{u_{E2}}{R_2}\right) \tag{10.7}$$

$$u_A = -\left(u_{E1} + u_{E2}\right) \text{ falls } R_1 = R_2 = R_3 \tag{10.8}$$

Differenzverstärker

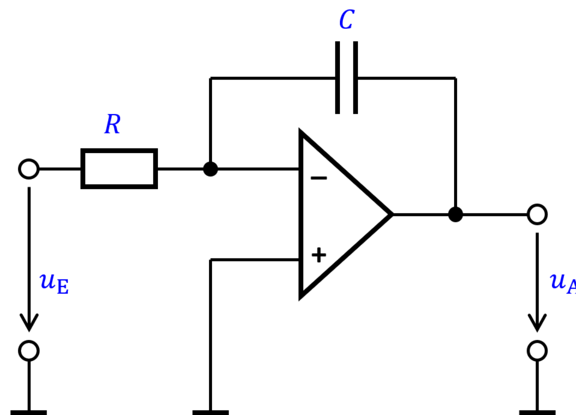


Der Differenzverstärker verstärkt die Differenz $u_{E1} - u_{E2}$ der beiden Eingangsspannungen u_{E1} und u_{E2}:

$$u_A = \frac{1 + \frac{R_1}{R_2}}{1 + \frac{R_3}{R_4}} \cdot u_{E1} - \frac{R_1}{R_2} \cdot u_{E2} \tag{10.9}$$

$$u_A = u_{E1} - u_{E2} \text{ falls } R_1 = R_2 = R_3 = R_4 \tag{10.10}$$

Invertierender Integrator

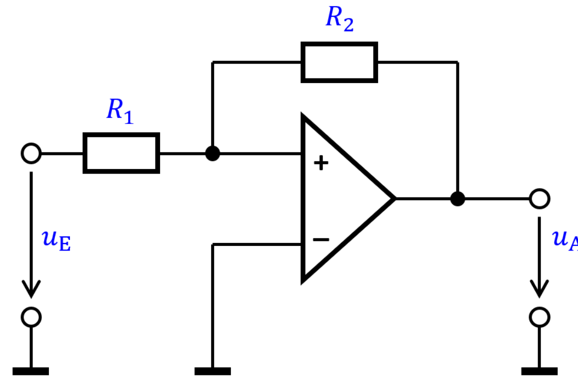


Die Spannung u_A am Ausgang des (invertierenden) Integrators ist proportional zum Integral der Eingangsspannung u_E:

$$u_A(t_1) = -\frac{1}{RC} \cdot \int_0^{t_1} u_E(t)\,\mathrm{d}t + u_A(0) \tag{10.11}$$

Falls der Kondensator zum Zeitpunkt $t = 0$ bereits geladen ist, dann ist $u_A(0) \neq 0$.

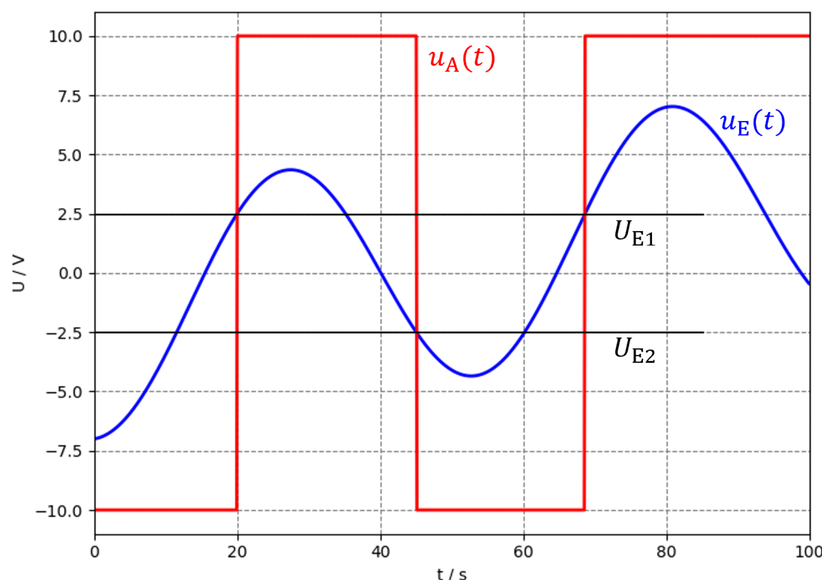
Nichtinvertierender Komparator mit Hysterese



Die Schaltung des nichtinvertierenden Komparators mit Hysterese sieht ähnlich aus wie die eines invertierenden Verstärkers. Nur die beiden Eingänge des Operationsverstärkers sind vertauscht. Dadurch wird die Ausgangsspannung u_A auf den nichtinvertierenden Eingang zurückgeführt (sog. Mitkopplung).

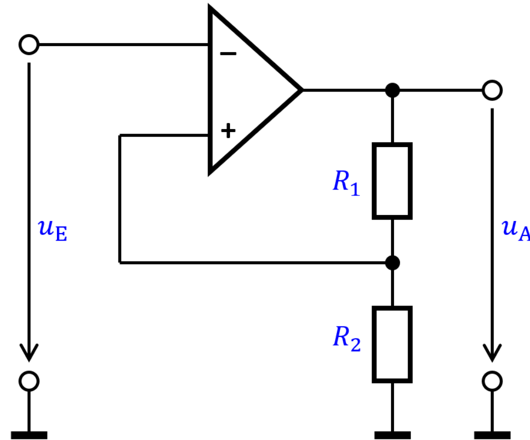
- Wenn die Eingangsspannung u_E steigt und den Schwellenwert U_{E1} überschreitet, so springt die Ausgangsspannung u_A auf den maximal möglichen Wert $U_{A,max}$.
- Wenn die Eingangsspannung u_E fällt und den Schwellenwert U_{E2} unterschreitet, so springt die Ausgangsspannung u_A auf den minimal möglichen Wert $U_{A,min}$.
- Für die Schwellenwerte U_{E1} und U_{E2} gilt:

$$U_{E1} = -U_{A,min} \cdot \frac{R_1}{R_2} \qquad U_{E2} = -U_{A,max} \cdot \frac{R_1}{R_2} \tag{10.12}$$



Im Beispiel sind $R_1 = 2{,}5\,\mathrm{k\Omega}$, $R_2 = 10\,\mathrm{k\Omega}$, $U_{A,max} = 10\,\mathrm{V}$ und $U_{A,min} = -10\,\mathrm{V}$.

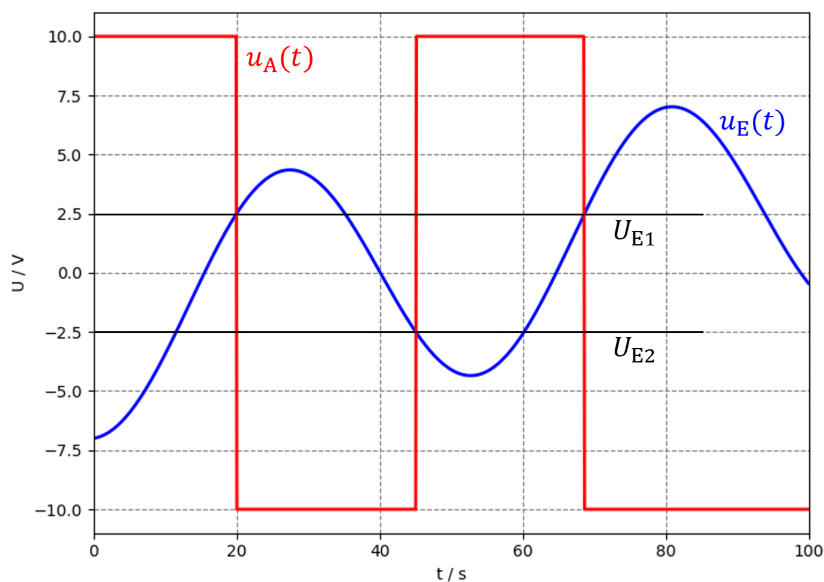
Invertierender Komparator mit Hysterese



Die Schaltung des invertierenden Komparators mit Hysterese sieht ähnlich aus wie die eines nichtinvertierenden Verstärkers. Nur die beiden Eingänge des Operationsverstärkers sind vertauscht. Wie schon beim nichtinvertierenden Komparator mit Hysterese wird auch hier die Ausgangsspannung u_A auf den nichtinvertierenden Eingang zurückgeführt (sog. Mitkopplung).

- Wenn die Eingangsspannung u_E steigt und den Schwellenwert U_{E1} überschreitet, so springt die Ausgangsspannung u_A auf den minimal möglichen Wert $U_{A,min}$.
- Wenn die Eingangsspannung u_E fällt und den Schwellenwert U_{E2} unterschreitet, so springt die Ausgangsspannung u_A auf den maximal möglichen Wert $U_{A,max}$.
- Für die Schwellenwerte U_{E1} und U_{E2} gilt:

$$U_{E1} = U_{A,max} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} \qquad U_{E2} = U_{A,min} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} \tag{10.13}$$



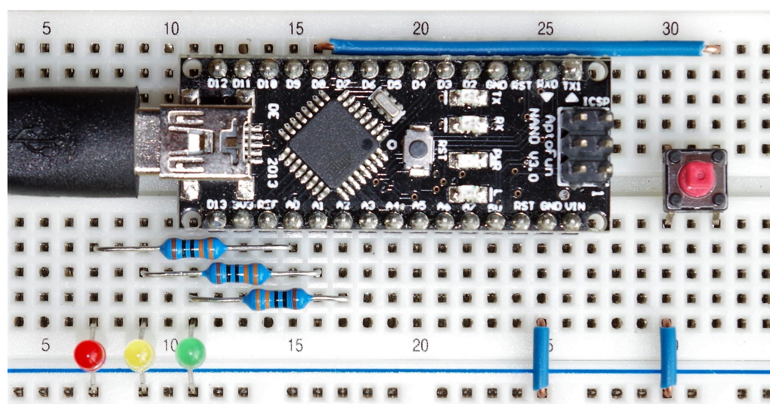
Im Beispiel sind $R_1 = 15\,\text{k}\Omega$, $R_2 = 5\,\text{k}\Omega$, $U_{A,max} = 10\,\text{V}$ und $U_{A,min} = -10\,\text{V}$.

A Programmierung von Mikrocontrollern

Eine „Leuchtdioden-Ampel“ zeigt Rot. Nach Betätigung eines Tasters wechselt sie auf Grün und später zurück auf Rot. Aufbau und Programmierung der Ampel erfolgen in zwei Varianten: zunächst unter Verwendung eines ATmega328P, einem 8-Bit AVR-Mikrocontroller der Firma Microchip, anschließend unter Verwendung eines STM32-F303K8, einem 32-Bit Cortex-M4-Mikrocontroller der Firma STMicroelectronics.

Leuchtdioden-Ampel mit ATmega328P

Die Programmierumgebung „Atmel Studio“ kann von der Webseite des Herstellers kostenlos heruntergeladen werden (https://www.microchip.com/).




```
// Leuchtdioden-Ampel mit ATmega328P (Platine: AptoFun Nano V3.0 Pro)
#define F_CPU 16000000UL
#include <avr/io.h>
#include <util/delay.h>   // für _delay_ms()

// Anschlüsse mit Leuchtdioden bzw. Taster
#define LED_ROT    PC0
#define LED_GELB   PC1
#define LED_GRUEN  PC2
#define TASTER     PB0

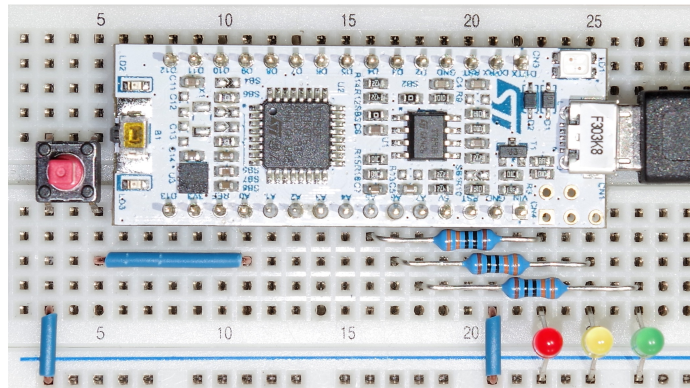
int main(void)
{
    // Ausgänge mit Leuchtdioden aktivieren
    DDRC  = _BV(LED_ROT) | _BV(LED_GELB) | _BV(LED_GRUEN);
    PORTB = _BV(TASTER );   // Pullup-Widerstand am Taster aktivieren
    PORTC = _BV(LED_ROT);   // Zunächst steht die Ampel auf Rot

    while(1)
    {
        // Warten, bis Taster gedrückt wird
        while(PINB & _BV(TASTER)) { }

        // Jetzt wechselt die Ampel auf Grün und dann wieder auf Rot
        PORTC = _BV(LED_GELB ) | _BV(LED_ROT); _delay_ms(2000);
        PORTC = _BV(LED_GRUEN); _delay_ms(15000);
        PORTC = _BV(LED_GELB ); _delay_ms( 2000);
        PORTC = _BV(LED_ROT  ); _delay_ms( 2000);
    }
}
```

Leuchtdioden-Ampel mit STM32F303K8

Zur Programmierung des STM32F303K8 wird in diesem Beispiel die Programmierumgebung „Mbed“ genutzt. Auf der Mbed-Webseite (https://os.mbed.com) gibt es einen Online-Compiler, die Installation von Programmiersoftware auf dem PC ist nicht erforderlich.




```
// Leuchtdioden-Ampel mit STM32F303K8 (Platine: NUCLEO-F303K8)
#include "mbed.h"

// Anschlüsse mit Leuchtdioden bzw. Taster
DigitalOut led_rot   (PA_6);
DigitalOut led_gelb  (PA_7);
DigitalOut led_gruen(PA_2);
DigitalIn  taster    (PA_0);

int main(void)
{
    // Pullup-Widerstand am Taster aktivieren
    taster.mode(PullUp);

    // Zunächst steht die Ampel auf Rot
    led_rot   = 1;
    led_gelb  = 0;
    led_gruen = 0;

    while(1)
    {
        // Warten, bis Taster gedrückt wird
        while(taster != 0) { }

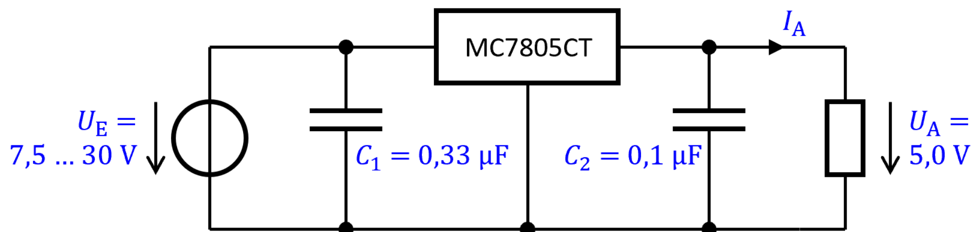
        // Jetzt wechselt die Ampel auf Grün und dann wieder auf Rot
        led_rot = 1; led_gelb = 1; led_gruen = 0; wait_ms( 2000);
        led_rot = 0; led_gelb = 0; led_gruen = 1; wait_ms(15000);
        led_rot = 0; led_gelb = 1; led_gruen = 0; wait_ms( 2000);
        led_rot = 1; led_gelb = 0; led_gruen = 0; wait_ms( 2000);
    }
}
```

B Integrierte lineare Spannungsregler

Die Ausgangsspannung der in Kapitel 5 gezeigten Z-Diodenschaltung zur Spannungsstabilisierung ist stabil und störungsarm. Die Qualität der Spannungsstabilisierung lässt sich sogar noch verbessern, wenn die Z-Diode durch eine integrierte Spannungsreferenz[3] ersetzt wird. Aufgrund des sehr niedrigen Wirkungsgrads kann diese Schaltung allerdings nur sehr kleine Ausgangsströme abgeben, sie ist zum Beispiel zur Erzeugung von Referenzspannungen geeignet.

Verbraucher mit einem Strombedarf oberhalb einiger Hundert Milliampere werden in der Regel durch Schaltwandler versorgt (zum Beispiel durch Abwärts- oder Aufwärtswandler, siehe Kapitel 9), sofern ein direkter Anschluss der Verbraucher an Batterien oder andere geeignete Spannungsquellen nicht möglich ist. Die benötigten Schaltwandler sind für kleinere Leistungen als kompakte Module, für größere Leistungen als fertig bestückte Platinen[4] in vielen Varianten erhältlich.

Für den Betrieb kleinerer Verbraucher mit einem Strombedarf unterhalb von einem Ampere bieten sich als weitere Alternative integrierte lineare Spannungsregler an. Diese liefern störungsarme Ausgangsspannungen bei einem Wirkungsgrad, der zwischen dem der einfachen Z-Diodenschaltungen und dem der aufwändigeren Schaltwandler liegt. Ein typischer integrierter linearer Spannungsregler umfasst neben der notwendigen Leistungselektronik auch verschiedene Schutzschaltungen, die den Baustein vor Beschädigungen durch Überlastung oder durch Kurzschlüsse am Ausgang bewahren.



Spannungsregler der Baureihe 78xx[5] sind weit verbreitet, sie werden von vielen unterschiedlichen Herstellern angeboten. Die Abbildung zeigt den Anschluss eines Verbrauchers an einen solchen Regler. Die Kondensatoren C_1 und C_2 verbessern die Stabilität der Regelung, falls lange Verbindungsleitungen am Eingang oder nicht-ohmsche Verbraucher am Ausgang des Reglers vorhanden sind.

Die Verlustleistung P_V führt zur Erwärmung des Spannungsreglers:

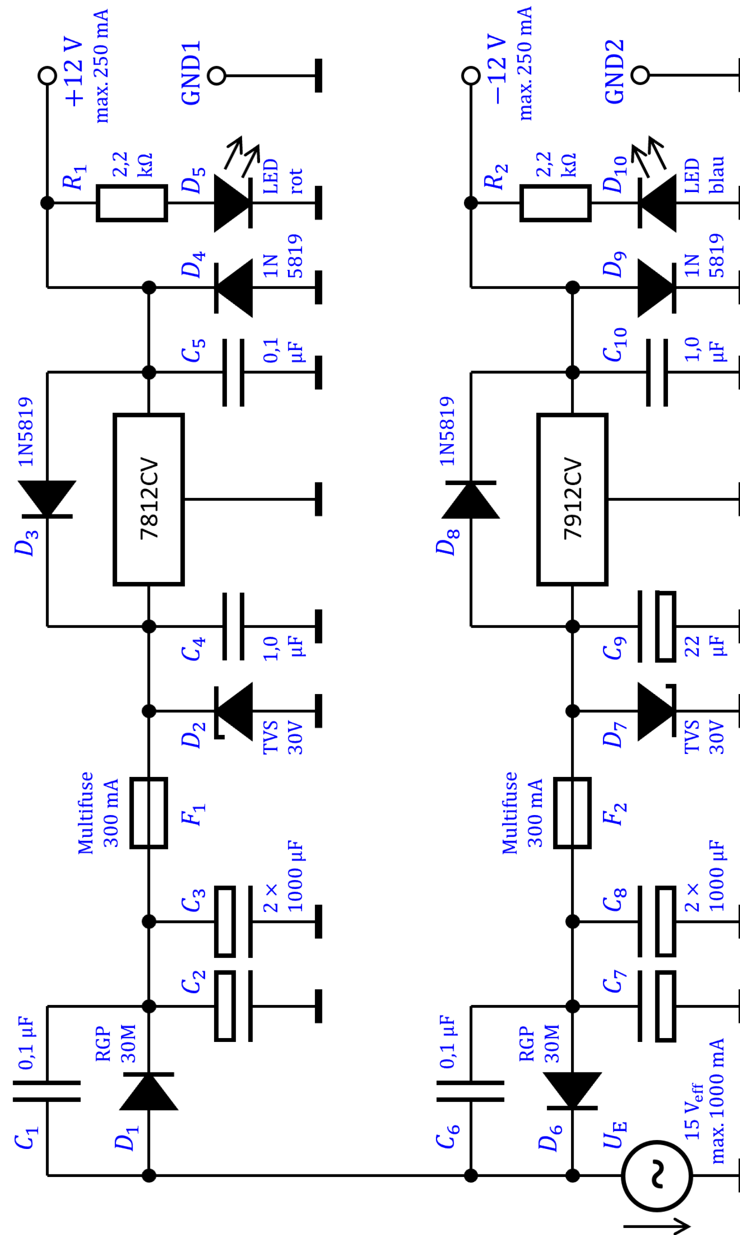
$$P_V \approx (U_E - U_A) \cdot I_A \tag{B.1}$$

[3]Als Beispiel sei der Baustein TLV431B von Texas Instruments genannt, sein Datenblatt ist im Internet verfügbar: https://www.ti.com/lit/ds/symlink/tlv431.pdf (Stand: 07/2019).

[4]Derartige Module und Baugruppen werden zum Beispiel von den Firmen Traco Electronic (https://www.tracopower.com) und RECOM Power (https://www.recom-power.com) vertrieben.

[5]Ein Datenblatt zu dieser Baureihe findet sich im Internetangebot der Firma ON Semiconductor (https://www.onsemi.com/pub/Collateral/MC7800-D.PDF, Stand: 12/2019).

Die nachfolgende Abbildung zeigt die Schaltung eines stabilisierten Festspannungsnetzteils, welches auf zwei integrierten linearen Spannungsreglern basiert. Es hat zwei Ausgänge, +12 V und −12 V, die jeweils Ströme von bis zu 250 mA abgeben können.[6] Die Verlustleistung beträgt pro Spannungsregler bis zu 2 W. Zur Kühlung sollten die Spannungsregler daher mit dem Gehäuse des Netzteils verschraubt werden (wärmeleitende Isolierscheiben unterlegen, um Kurzschlüsse zu verhindern!).



Die Leuchtdioden dienen nicht nur zur Funktionsanzeige. Sie sorgen auch für eine gewisse Mindestlast an beiden Spannungsreglern, falls kein Verbraucher am Netzteil angeschlossen ist. Manche Spannungsregler benötigen dies, da ihre Ausgangsspannungen im Leerlauf sonst deutlich vom Sollwert abweichen (Datenblätter beachten!).

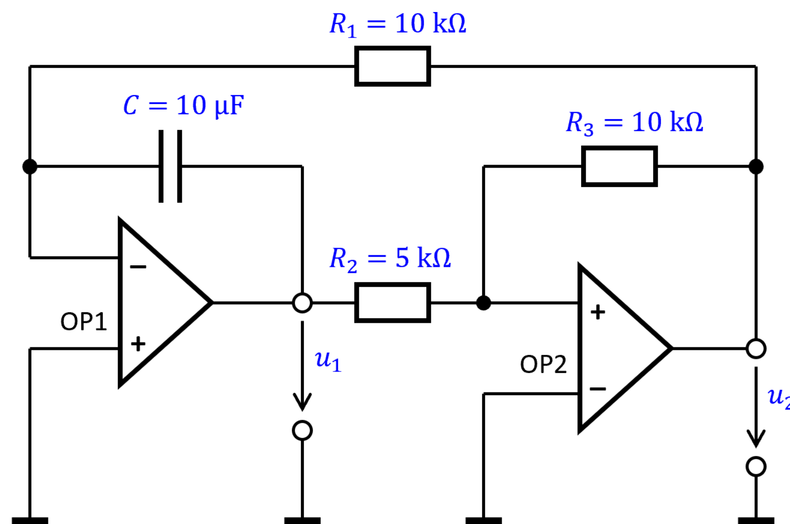
[6]Der Innenwiderstand der Wechselspannungsquelle U_E am Eingang des Netzteils sollte nicht zu gering sein, um hohe Einschaltströme bei ungeladenen Kondensatoren $C_{2,3}$ bzw. $C_{7,8}$ zu vermeiden. Es eignet sich beispielsweise ein AC-Steckernetzteil des Typs HQ-Power PS1510AC.

C Schaltungen mit Operationsverstärkern

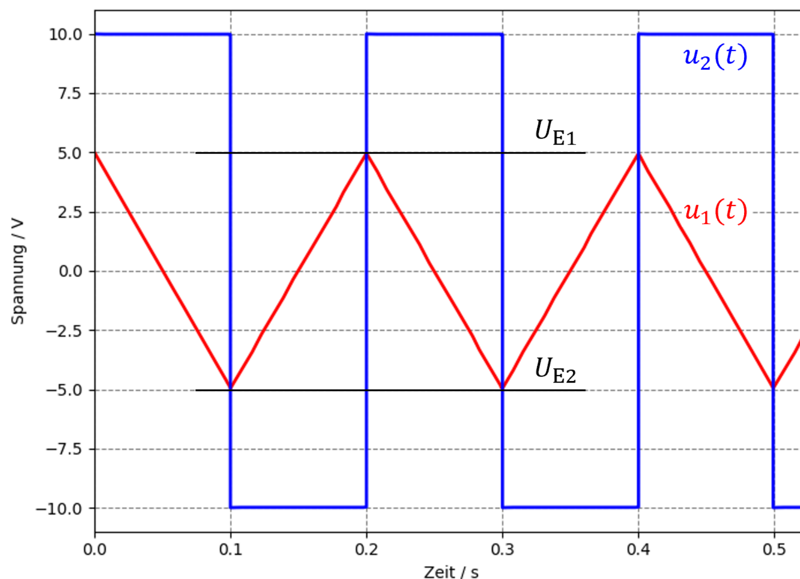
Die in Kapitel 10 gezeigten Operationsverstärkerstufen können zu komplexeren Schaltungen kombiniert werden. Zum praktischen Aufbau der folgenden Schaltungsbeispiele bzw. von ähnlichen Schaltungen eignen sich Universal-Operationsverstärker wie die Typen AD822 (Analog Devices) oder OPA2197 (Texas Instruments). Für alle Operationsverstärker auf den folgenden Seiten gilt: $U_{\mathrm{A,min}} = -10\,\mathrm{V}$ und $U_{\mathrm{A,max}} = 10\,\mathrm{V}$.

Funktionsgenerator

Der Funktionsgenerator besteht aus einem Integrator (OP1) sowie einem Komparator mit Hysterese (OP2). Der Ausgang einer jeden Stufe ist jeweils mit dem Eingang der anderen Stufe verbunden.

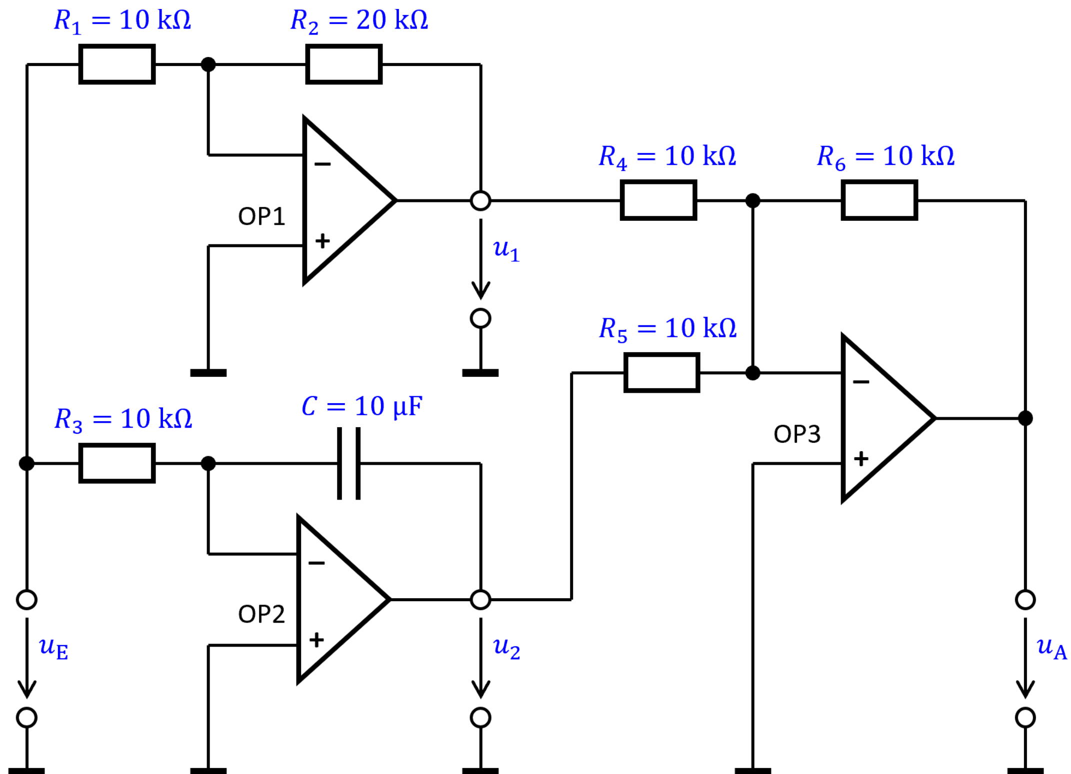


Die Umschaltschwellen des Komparators liegen hier bei $U_{\mathrm{E1}} = 5\,\mathrm{V}$ bzw. $U_{\mathrm{E2}} = -5\,\mathrm{V}$. Die Verläufe von u_1 und u_2 sind im folgenden Diagramm abgebildet. Der Funktionsgenerator erzeugt an seinen Ausgängen Rechteck- und Dreiecksignale mit derselben Frequenz.

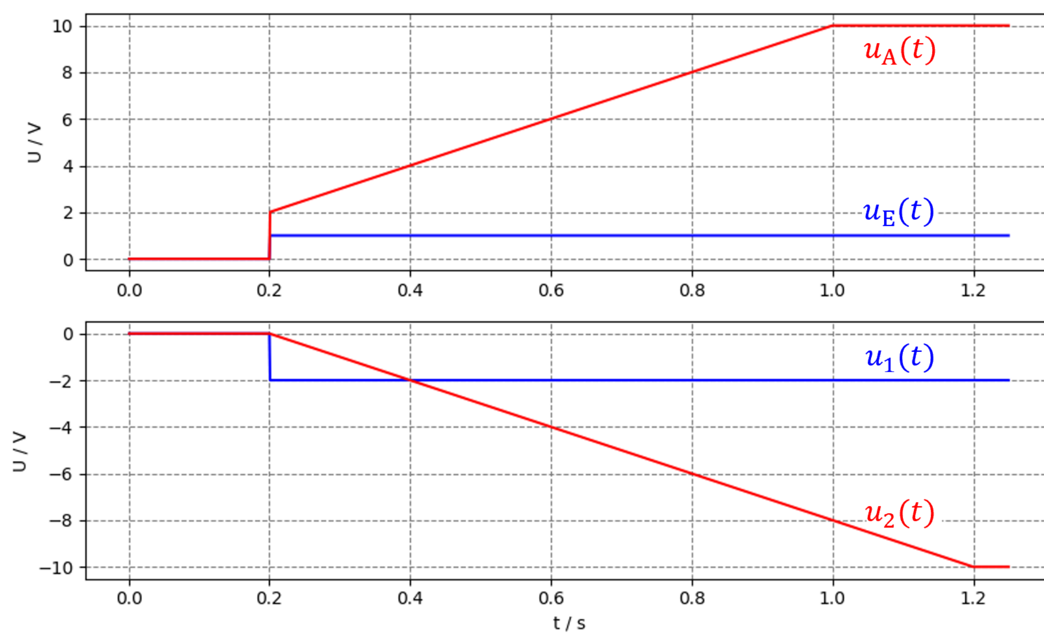


PI-Regler

Der PI-Regler besteht aus drei Operationsverstärkerstufen, einem invertierenden Verstärker (OP1), einem Integrator (OP2) sowie einem Addierer (OP3).

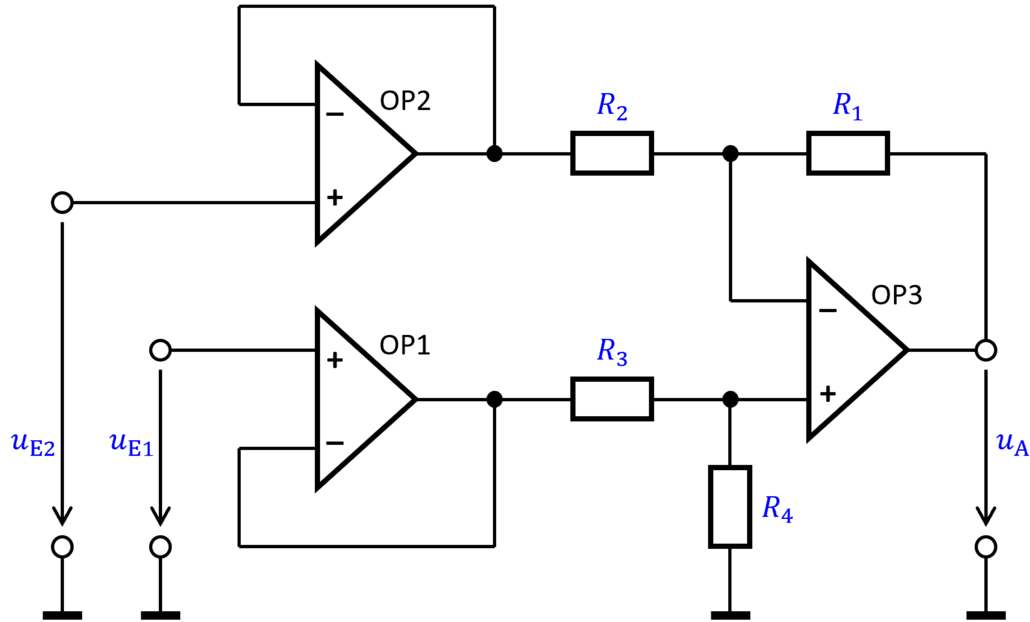


Das Diagramm zeigt die Reaktion des PI-Reglers auf einen Sprung der Eingangsspannung u_E (sog. Sprungantwort). Ebenfalls dargestellt sind die Spannungen u_1 und u_2 an den Ausgängen von OP1 und OP2.



Instrumentenverstärker

Eine typische Aufgabe in der elektronischen Messtechnik ist die präzise Ermittlung von Spannungsdifferenzen. Diese Aufgabe ist mit dem in Kapitel 10 gezeigten Differenzverstärker (Seite 31) durchaus lösbar, allerdings sind seine Eingänge für viele Anwendungen zu niederohmig. Durch Impedanzwandler an den beiden Eingängen ist dieser Mangel leicht zu beheben. Es ergibt sich der sog. Instrumentenverstärker:



Für die Ausgangsspannung u_A gilt nach wie vor:

$$u_\mathrm{A} = \frac{1 + \frac{R_1}{R_2}}{1 + \frac{R_3}{R_4}} \cdot u_\mathrm{E1} - \frac{R_1}{R_2} \cdot u_\mathrm{E2} \tag{C.1}$$

Drei zusätzliche Widerstände im Bereich der beiden Impedanzwandler führen zu einer weiteren, sehr eleganten Variante des Instrumentenverstärkers (siehe Abbildung auf der folgenden Seite). Jetzt ist es möglich, die Verstärkung der Schaltung durch Variation eines einzelnen Widerstands (R_X) einzustellen.

Solange die (idealen) Operationsverstärker OP1 und OP2 nicht übersteuert sind, entspricht die Spannung[7] an Position X1 der Eingangsspannung u_E1 und die Spannung an Position X2 der Eingangsspannung u_E2. Für i_X gilt also:

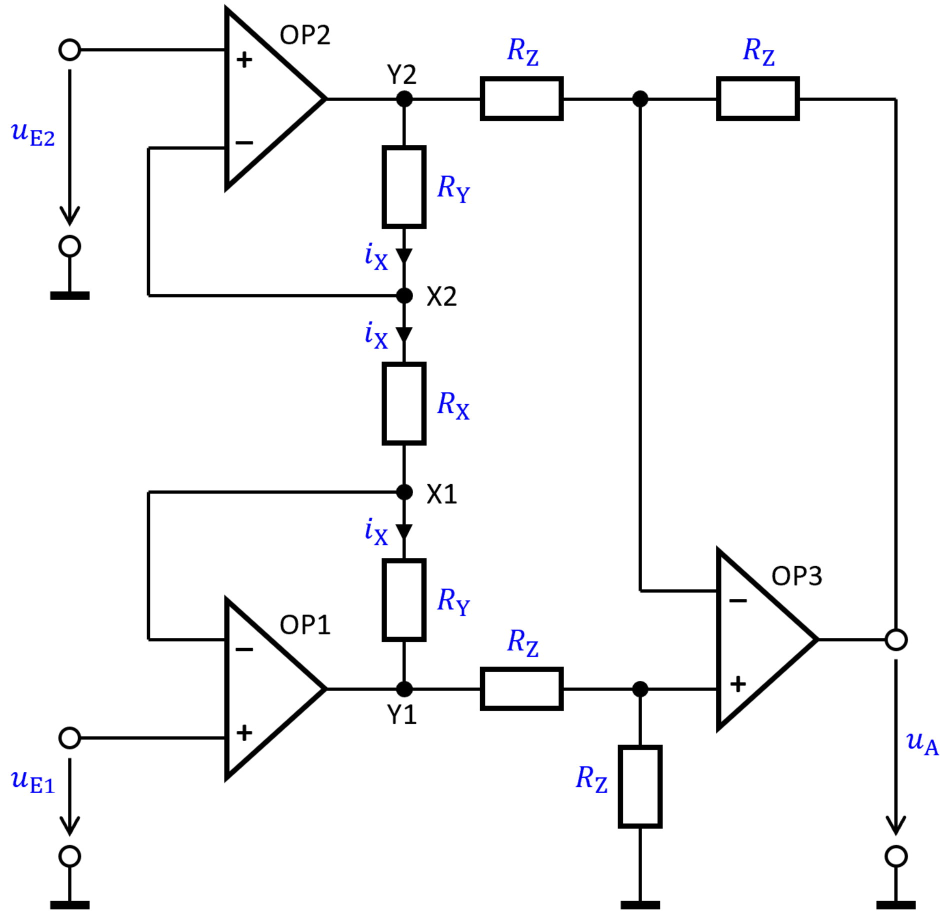
$$i_\mathrm{X} = \frac{u_\mathrm{X2} - u_\mathrm{X1}}{R_\mathrm{X}} = \frac{u_\mathrm{E2} - u_\mathrm{E1}}{R_\mathrm{X}} \tag{C.2}$$

Damit können die Spannungen an den Positionen Y1 und Y2 berechnet werden:

$$u_\mathrm{Y1} = u_\mathrm{X1} - i_\mathrm{X} \cdot R_\mathrm{Y} = u_\mathrm{E1} - \frac{u_\mathrm{E2} - u_\mathrm{E1}}{R_\mathrm{X}} \cdot R_\mathrm{Y} \tag{C.3}$$

$$u_\mathrm{Y2} = u_\mathrm{X2} + i_\mathrm{X} \cdot R_\mathrm{Y} = u_\mathrm{E2} + \frac{u_\mathrm{E2} - u_\mathrm{E1}}{R_\mathrm{X}} \cdot R_\mathrm{Y} \tag{C.4}$$

[7] Sofern nicht anders angegeben, beziehen sich alle Spannungsangaben auf Masse.



Die vier Widerstände R_Z des nachfolgenden Differenzverstärkers (OP3) sind gleich groß, die Ausgangsspannung u_A ergibt sich daher als Differenz von u_{Y1} und u_{Y2}:

$$u_A = u_{Y1} - u_{Y2} = u_{E1} - (u_{E2} - u_{E1}) \cdot \frac{R_Y}{R_X} - u_{E2} - (u_{E2} - u_{E1}) \cdot \frac{R_Y}{R_X} \tag{C.5}$$

Dies kann schließlich vereinfacht werden zu:

$$u_A = (u_{E1} - u_{E2}) \cdot \left(1 + \frac{2R_Y}{R_X}\right) \tag{C.6}$$

Instrumentenverstärker werden als integrierte Schaltkreise von vielen Herstellern angeboten. In der Praxis ist es nur selten erforderlich, sie mit einzelnen Operationsverstärkern diskret aufzubauen. Typische Beispiele für solche integrierten Instrumentenverstärker sind die Bausteine LT1167 (Analog Devices, früher Linear Technology), AD620 (ebenfalls Analog Devices) und INA326 (Texas Instruments).

Weitere Informationen zu Operations- und Instrumentenverstärkern sowie unzählige Schaltungsvorschläge finden sich im Internetangebot der jeweiligen Hersteller. Die Application Notes 43 („Bridge Circuits“) und 47 („High Speed Amplifier Techniques“) der Firma Linear Technology[8] sind zwei lesenswerte Beispiele.

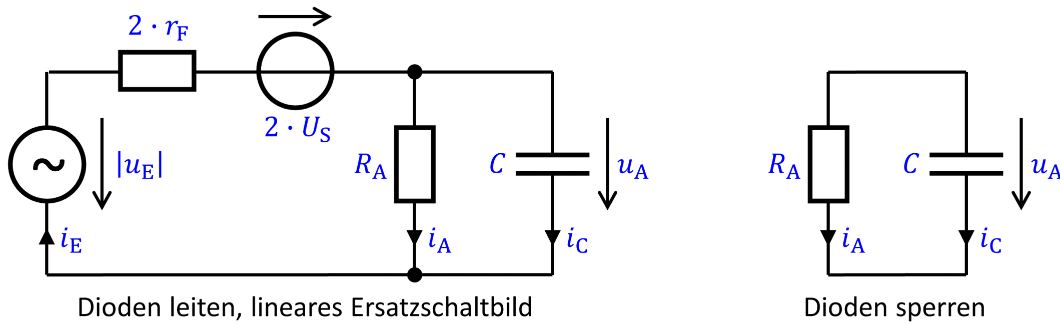
[8] Beide Dokumente können von der Webseite der Fima Analog Devices heruntergeladen werden, siehe https://www.analog.com/media/en/technical-documentation/application-notes/an43f.pdf respektive https://www.analog.com/media/en/technical-documentation/application-notes/an47fa.pdf, Stand: 10/2019

D Schaltungssimulation mit Python

In den folgenden Abschnitten wird gezeigt, wie das dynamische Verhalten elektronischer Schaltungen unter Nutzung der Programmiersprache Python[9] simuliert werden kann. Mehrere Abbildungen in dieser Formelsammlung wurden so erstellt.

Simulation einer B2-Schaltung

Ausgangspunkt der folgenden Berechnungen ist die in Kapitel 5 (Seite 8) gezeigte Schaltung. Die Gleichrichterdioden wechseln paarweise zwischen leitendem und sperrendem Zustand. Über jeweils zwei leitende Dioden wird der Glättungskondensator C aufgeladen (Abbildung links), die Ausgangsspannung u_A steigt. Wenn die Dioden wieder sperren, wird der Laststrom i_A nur noch vom Kondensator C geliefert (Abbildung rechts). Dieser entlädt sich etwas, die Ausgangsspannung u_A sinkt entsprechend.



Für $|u_\mathrm{E}| - 2 \cdot U_\mathrm{S} > u_\mathrm{A}$ befindet sich die Schaltung in der Aufladephase:

$$i_\mathrm{E} = \frac{|u_\mathrm{E}| - 2 \cdot U_\mathrm{S} - u_\mathrm{A}}{2 \cdot r_\mathrm{F}} \qquad i_\mathrm{A} = \frac{u_\mathrm{A}}{R_\mathrm{A}} \qquad i_\mathrm{C} = C \cdot \frac{\mathrm{d}u_\mathrm{A}}{\mathrm{d}t} \tag{D.1}$$

Durch Einsetzen dieser Ströme in die Knotengleichung $i_\mathrm{E} = i_\mathrm{A} + i_\mathrm{C}$ ergibt sich eine Differentialgleichung zur Berechnung von u_A (Aufladephase, Abbildung links):

$$\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{A}}{\mathrm{d}t} = -\frac{u_\mathrm{A}}{R_\mathrm{A} \cdot C} + \frac{|u_\mathrm{E}| - 2 \cdot U_\mathrm{S} - u_\mathrm{A}}{2 \cdot r_\mathrm{F} \cdot C} \tag{D.2}$$

Für $|u_\mathrm{E}| - 2 \cdot U_\mathrm{S} \leq u_\mathrm{A}$ verschwindet der Diodenstrom i_E, die Differentialgleichung nimmt die folgende Form an (Entladephase, Abbildung rechts):

$$\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{A}}{\mathrm{d}t} = -\frac{u_\mathrm{A}}{R_\mathrm{A} \cdot C} \tag{D.3}$$

Die numerische Lösung dieser Differentialgleichung ist mit einem Computer problemlos möglich. Der Quelltext auf der folgenden Seite zeigt die Definition der Differentialgleichung (Funktion b2_dgl), den Aufruf des numerischen Lösungsverfahrens (odeint) sowie die grafische Ausgabe der Ergebnisse (plt.plot...).

[9]Wenn eine mathematische Beschreibung der zu simulierenden Schaltung nicht benötigt wird oder der Aufwand dafür zu hoch ist, dann kann das Schaltungsverhalten natürlich auch mit Simulationssoftware wie LTspice (siehe https://www.analog.com/en/design-center/design-tools-and-calculators/ltspice-simulator.html, Stand 10/2019) untersucht werden.

```
# ---------------------------------------------------------------------------
# Simulation einer B2-Schaltung
# ---------------------------------------------------------------------------
from scipy.integrate import odeint
from numpy import pi, sin, linspace
import matplotlib.pyplot as plt

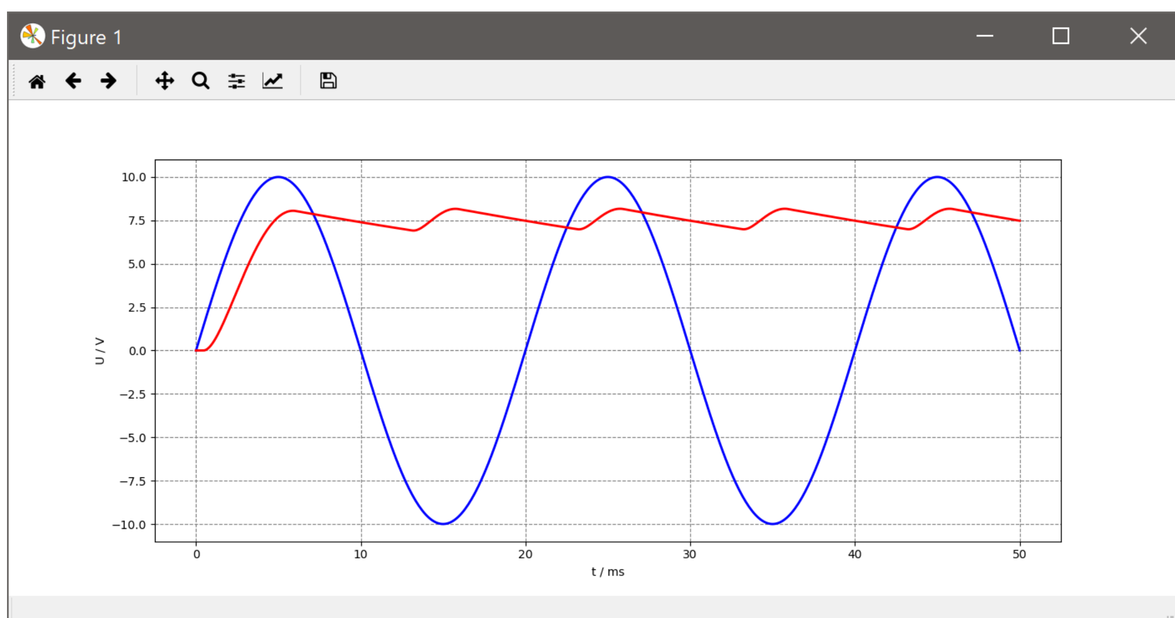
# ---------------------------------------------------------------------------
# Eingangsspannung zum Zeitpunkt t berechnen
# ---------------------------------------------------------------------------
def ue(t):
    ampl = 10.0                      # Amplitude (in V)
    freq = 50.0                      # Frequenz (in Hz)
    return ampl * sin(2.0 * pi * freq * t)

# ---------------------------------------------------------------------------
# Differentialgleichung zur Berechnung der Ausgangsspannung
# ---------------------------------------------------------------------------
def b2_dgl(ua, t):
    C = 0.000470                     # Glättungskapazität (in F)
    Ra = 100.0                       # Lastwiderstand (in Ohm)
    Us = 0.7                         # Schwellenspannung Diode (in V)
    rf = 1.0                         # diff. Widerstand Diode (in Ohm)
    ue_b = abs(ue(t))                # Betrag der Eingangsspannung

    if ue_b - 2 * Us <= ua:          # Entladephase
        return -ua / (Ra * C)
    else:                            # Aufladephase
        return -ua / (Ra * C) + (ue_b - 2 * Us - ua) / (2 * rf * C)

# ---------------------------------------------------------------------------
# Ausgangsspannung berechnen und plotten
# ---------------------------------------------------------------------------
t_arr = linspace(0, 0.05, 500)       # Zeitintervall für Berechnung
ua_arr = odeint(b2_dgl, 0, t_arr)    # Differentialgleichung lösen

plt.plot(t_arr * 1000, ue(t_arr), 'b-', linewidth=2)
plt.plot(t_arr * 1000, ua_arr,    'r-', linewidth=2)
plt.grid(True, color='gray', linestyle='dashed')
plt.xlabel('t / ms')
plt.ylabel('U / V')
```

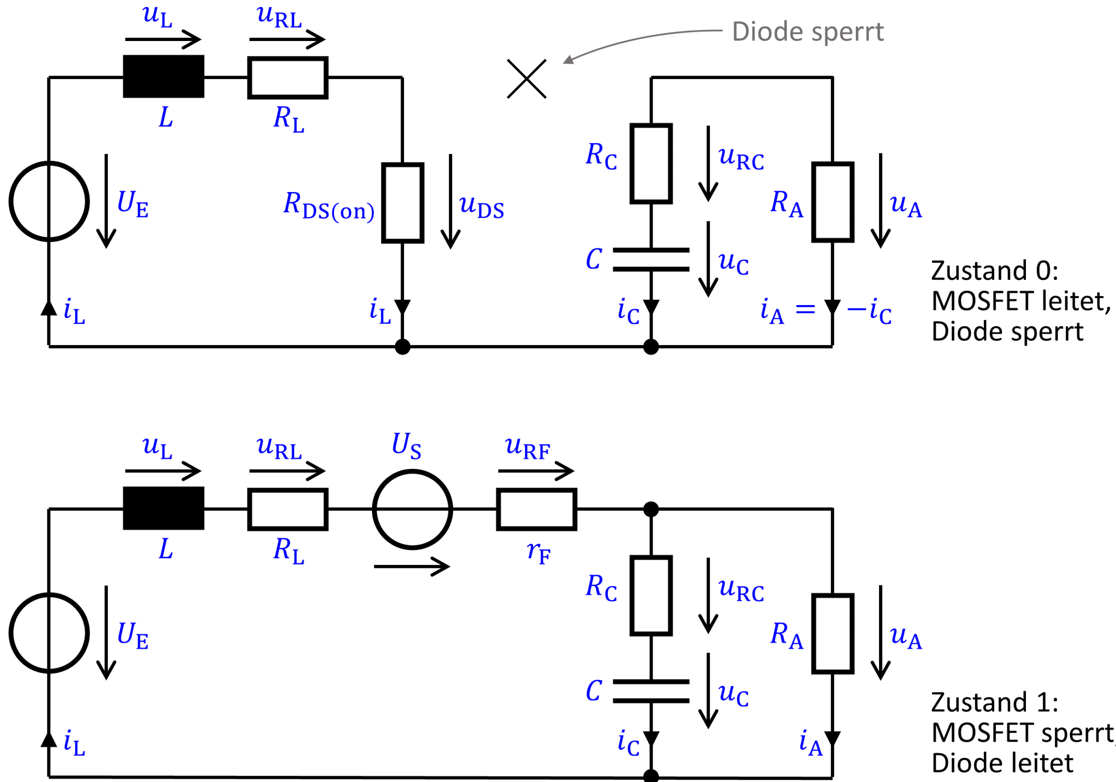


Simulation eines Aufwärtswandlers

In einem Aufwärtswandler (siehe Kapitel 9, Seite 27) befinden sich zwei Energiespeicher, eine Spule und ein Kondensator. Bei der mathematischen Beschreibung des Wandlers ergibt sich daher ein System aus zwei Differentialgleichungen: eine Gleichung für den Spulenstrom i_L, eine weitere Gleichung für die Kondensatorspannung u_C.

Im Gegensatz zu Kapitel 9 werden nun – zum Vergleich – keine idealen Bauelemente mehr vorausgesetzt: Die Spule hat neben ihrer Induktivität L den Widerstand R_L, der Kondensator neben seiner Kapazität C den Widerstand R_C und der eingeschaltete MOSFET den Widerstand $R_{DS(on)}$. Die Diode wird durch ein lineares Ersatzschaltbild mit der Schwellenspannung U_S und dem differentiellen Widerstand r_F beschrieben.

Der Aufwärtswandler wechselt regelmäßig zwischen den folgenden beiden Zuständen: MOSFET leitet (Abbildung oben, ab jetzt „Zustand 0“ genannt) und MOSFET sperrt (Abbildung unten, ab jetzt „Zustand 1“ genannt). Im Übrigen wird davon ausgegangen, dass der Spulenstrom i_L stets positiv bleibt (kein lückender Betrieb).



Zur Berechnung von i_L und u_C werden Maschengleichungen aufgestellt. Zunächst für den Zustand 0 (MOSFET leitet):

$$-U_E + u_L + u_{RL} + u_{DS} = 0 \text{ mit } u_L = L \cdot \frac{di_L}{dt},\ u_{RL} = i_L \cdot R_L,\ u_{DS} = i_L \cdot R_{DS(on)} \tag{D.4}$$

$$-u_C - u_{RC} + u_A = 0 \text{ mit } u_{RC} = i_C \cdot R_C,\ u_A = -i_C \cdot R_A,\ i_C = C \cdot \frac{du_C}{dt} \tag{D.5}$$

Anschließend für den Zustand 1 (MOSFET sperrt):

$$-U_\mathrm{E} + u_\mathrm{L} + u_\mathrm{RL} + U_\mathrm{S} + u_\mathrm{RF} + u_\mathrm{A} = 0 \text{ mit } u_\mathrm{L} = L \cdot \frac{\mathrm{d}i_\mathrm{L}}{\mathrm{d}t},\ u_\mathrm{RL} = i_\mathrm{L} \cdot R_\mathrm{L},\ u_\mathrm{RF} = i_\mathrm{L} \cdot r_\mathrm{F} \quad \text{(D.6)}$$

$$-u_\mathrm{C} - u_\mathrm{RC} + u_\mathrm{A} = 0 \text{ mit } u_\mathrm{RC} = i_\mathrm{C} \cdot R_\mathrm{C},\ i_\mathrm{C} = C \cdot \frac{\mathrm{d}u_\mathrm{C}}{\mathrm{d}t} \quad \text{(D.7)}$$

Werden die Ableitungen in den Gleichungen D.4 bis D.7 auf die linke Seite gebracht, ergibt sich das Differentialgleichungssystem zur Beschreibung des Aufwärtswandlers. Für den Zustand 0 gilt (MOSFET leitet):

$$\frac{\mathrm{d}i_\mathrm{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{U_\mathrm{E} - i_\mathrm{L} \cdot (R_\mathrm{L} + R_\mathrm{DS(on)})}{L} \quad \text{(D.8)}$$

$$\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{C}}{\mathrm{d}t} = \frac{-u_\mathrm{C}}{C \cdot (R_\mathrm{A} + R_\mathrm{C})} \quad \text{(D.9)}$$

Für den Zustand 1 gilt (MOSFET sperrt):

$$\frac{\mathrm{d}i_\mathrm{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{U_\mathrm{E} - U_\mathrm{S} - u_\mathrm{A} - i_\mathrm{L} \cdot (R_\mathrm{L} + r_\mathrm{F})}{L} \quad \text{(D.10)}$$

$$\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{C}}{\mathrm{d}t} = \frac{u_\mathrm{A} - u_\mathrm{C}}{C \cdot R_\mathrm{C}} \quad \text{(D.11)}$$

Die in den Gleichungen an einigen Stellen vorkommende Ausgangsspannung u_A kann bei Bedarf jederzeit aus Spulenstrom i_L und Kondensatorspannung u_C berechnet werden. Im Zustand 0 gilt (MOSFET leitet):

$$u_\mathrm{A} = R_\mathrm{A} \cdot i_\mathrm{A} = R_\mathrm{A} \cdot \frac{u_\mathrm{C}}{R_\mathrm{A} + R_\mathrm{C}} = \frac{R_\mathrm{A}}{R_\mathrm{A} + R_\mathrm{C}} \cdot u_\mathrm{C} \quad \text{(D.12)}$$

Im Zustand 1 gilt (MOSFET sperrt):

$$u_\mathrm{A} = R_\mathrm{A} \cdot (i_\mathrm{L} - i_\mathrm{C}) = R_\mathrm{A} \cdot \left(i_\mathrm{L} - \frac{u_\mathrm{A} - u_\mathrm{C}}{R_\mathrm{C}}\right) = \frac{R_\mathrm{A}}{R_\mathrm{A} + R_\mathrm{C}} \cdot (R_\mathrm{C} \cdot i_\mathrm{L} + u_\mathrm{C}) \quad \text{(D.13)}$$

Das Differentialgleichungssystem kann nun numerisch gelöst werden. Der Quelltext auf der folgenden Seite zeigt die Definition des Gleichungssystems (Funktion stepup_dgl), den Aufruf des numerischen Lösungsverfahrens (odeint) sowie schließlich die grafische Ausgabe der Ergebnisse (plt.plot...).

Aufgrund der hohen Schaltfrequenz ($f_\mathrm{S} = 200\,\mathrm{kHz}$) ergibt sich eine Vielzahl von Zustandswechseln, wodurch die automatische odeint-Schrittweitensteuerung „aus dem Tritt“ geraten kann. Die maximal zulässige Schrittweite wird daher über den hmax-Parameter auf einen bewusst klein gewählten Wert gesetzt, sodass mindestens 100 Zeitschritte pro Periode berechnet werden.

```
# --------------------------------------------------------------------
# Simulation eines Aufwärtswandlers
# --------------------------------------------------------------------
from scipy.integrate import odeint
from numpy import arange, fmod
import matplotlib.pyplot as plt

freq = 200000.0      # Frequenz (in Hz)
tast = 0.333333      # Tastgrad (0...1)
Ra = 25.0            # Lastwiderstand (in Ohm)
Ue = 5.0             # Eingangsspannung (in Volt)
C = 0.00001          # Kapazität (in F)
L = 0.0001           # Induktivität (in H)
Rl = 0.2             # Widerstand der Spule (in Ohm)
Rc = 0.1             # Widerstand des Kondensators (in Ohm)
Us = 0.4             # Schwellenspannung der Diode (in V)
rf = 0.5             # diff. Widerstand der Diode (in Ohm)
Rdson = 0.1          # Widerstand des eingeschalteten MOSFETs (in Ohm)
step = 0.01 / freq   # Simulations-Zeitschritt (mind. 100 pro Periode)
stop = 0.01          # Simulationsdauer (in Sekunden)
y0 = [0.45, 7.5]     # Startwerte für il und uc

# --------------------------------------------------------------------
# In welchem Zustand befindet sich die Schaltung zum Zeitpunkt t?
# (Zustand 0 --> MOSFET leitet, Zustand 1 --> MOSFET sperrt)
# --------------------------------------------------------------------
def zustand(t):
    if fmod(t, 1 / freq) < (tast / freq):
        return 0
    else:
        return 1

# --------------------------------------------------------------------
# Ausgangsspannung aus Spulenstrom und Kondensatorspannung berechnen
# --------------------------------------------------------------------
def ua(il, uc, t):
    if zustand(t) == 0:
        return Ra / (Ra + Rc) * uc
    else:
        return Ra / (Ra + Rc) * (Rc * il + uc)

# --------------------------------------------------------------------
# Definition des Differentialgleichungssystems
# --------------------------------------------------------------------
def stepup_dgl(y, t):
    il = y[0]
    uc = y[1]

    if zustand(t) == 0:
        dil_dt = (Ue - il * (Rl + Rdson)) / L
        duc_dt = -uc / (C * (Ra + Rc))
    else:
        dil_dt = (Ue - Us - ua(il, uc, t) - il * (Rl + rf)) / L
        duc_dt = (ua(il, uc, t) - uc) / (C * Rc)

    dy_dt = [dil_dt, duc_dt]
    return dy_dt

# --------------------------------------------------------------------
# Differentialgleichungssystem numerisch lösen,
# zeitliche Verläufe von Spannungen und Strömen plotten.
# --------------------------------------------------------------------
t_arr = arange(0, stop, step)
y_arr = odeint(stepup_dgl, y0, t_arr, hmax=step)
il_arr = y_arr[:, 0]
uc_arr = y_arr[:, 1]
```

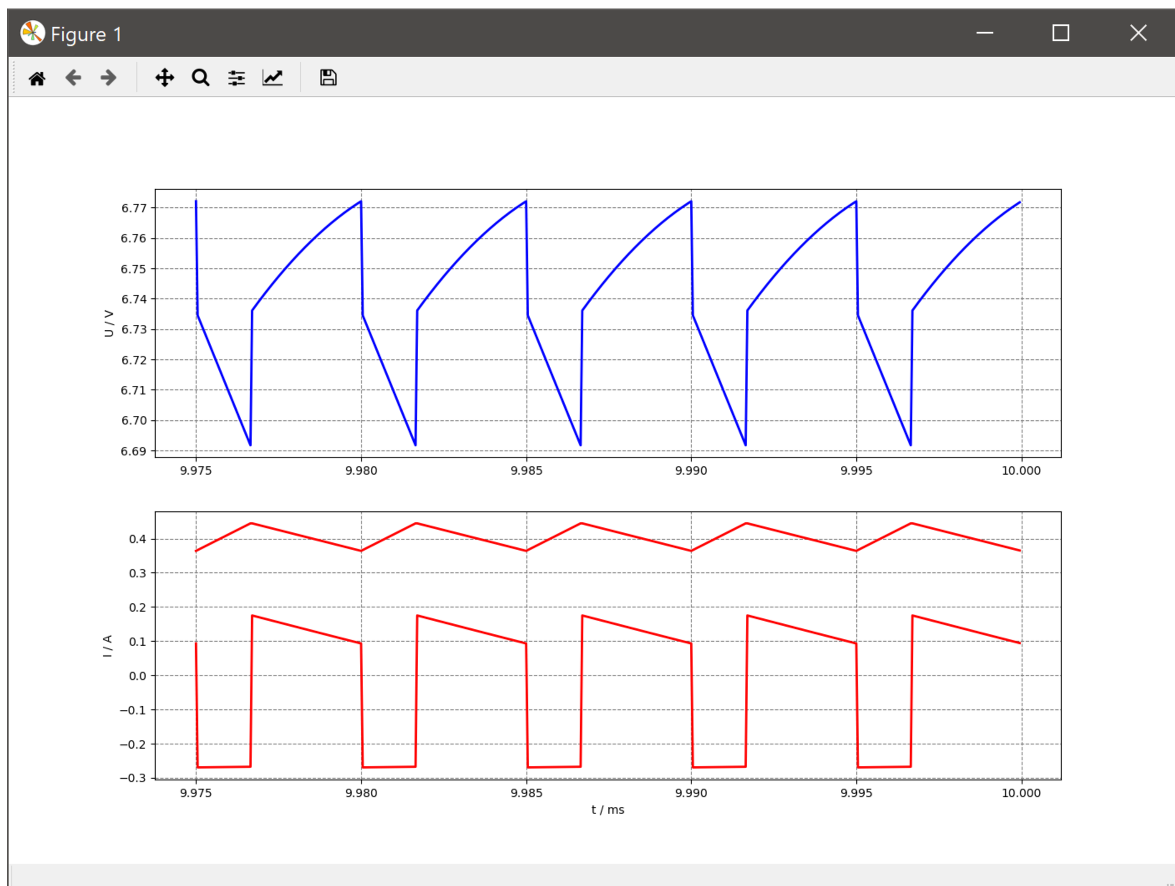
```
# Aus den bereits bekannten Verläufen von Spulenstrom und Kondensatorspannung
# werden nun noch die Verläufe der Ausgangsspannung und des Kondensatorstroms
# berechnet, damit diese ebenfalls gezeichnet werden können.
ua_arr = []
ic_arr = []

for t, il, uc in zip(t_arr, il_arr, uc_arr):
    UA = ua(il, uc, t)
    ua_arr.append(UA)
    ic_arr.append(zustand(t) * il - UA / Ra)

# Nur die letzten 500 Simulationsschritte werden gezeichnet;
# der Einschwingvorgang am Anfang interessiert uns nicht.
d = 500
plt.subplot(2, 1, 1)
plt.plot(t_arr[-d:] * 1000, ua_arr[-d:], 'b-', linewidth=2)
plt.grid(True, color='gray', linestyle='dashed')
plt.ylabel('U / V')

plt.subplot(2, 1, 2)
plt.plot(t_arr[-d:] * 1000, il_arr[-d:], 'r-', linewidth=2)
plt.plot(t_arr[-d:] * 1000, ic_arr[-d:], 'r-', linewidth=2)
plt.grid(True, color='gray', linestyle='dashed')
plt.ylabel('I / A')
plt.xlabel('t / ms')
```

Man beachte die Unterschiede zwischen den in Kapitel 9 gezeigten Spannungs- und Stromverläufen und denen, die sich mit den hier im Quelltext definierten nicht-idealen Bauelementen ergeben: Eingangsspannung u_A, Schaltfrequenz f_S, Tastgrad D und Lastwiderstand R_A sind in beiden Fällen gleich groß!



E Wichtige Größen

Elementarladung	e	$1{,}602\,177 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{As}$
Boltzmannkonstante	k	$1{,}380\,649 \cdot 10^{-23}\,\frac{\mathrm{VAs}}{\mathrm{K}}$
Magnetische Feldkonstante	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}$
Elektrische Feldkonstante	ϵ_0	$8{,}854\,188 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}$
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c_0	$299\,792\,458\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
Temperaturspannung kT/e	U_T	$25{,}852\,\mathrm{mV}$ $(T = 300\,\mathrm{K})$

F Weiterführende Literatur

[1] Paul Horowitz, Winfield Hill:
The Art of Electronics
Cambridge University Press, 3. Auflage, 2015.
ISBN-13: 978-0521809269

Eine ausführliche Darstellung der analogen und digitalen Schaltungstechnik mit unzähligen Beispielen aus der Praxis. Das Kapitel 9 („Voltage Regulation and Power Conversion") kann von der Webseite https://artofelectronics.net kostenlos heruntergeladen werden (Stand: 07/2019).

[2] Ulrich Tietze, Christoph Schenk, Eberhard Gamm:
Halbleiter-Schaltungstechnik
Springer Vieweg, 16. Auflage, 2019.
ISBN-13: 978-3662485538

Eine weitere ausführliche Darstellung der analogen und digitalen Schaltungstechnik; mehr Theorie und weniger Praxis als in „The Art of Electronics", dafür auf Deutsch und wohl in jeder Lehrbuchsammlung vorhanden.

[3] Stefan Goßner:
Grundlagen der Elektronik
Shaker-Verlag, 11. Auflage, 2019.
ISBN-13: 978-3844067842

Ein über 500-seitiges Lehrbuch, das insbesondere hinsichtlich der analogen Schaltungstechnik deutlich über die Inhalte der Lehrveranstaltung hinausgeht, welche dieser Formelsammlung zugrunde liegt. Eine ältere Auflage kann von der Webseite https://www.prof-gossner.de kostenlos heruntergeladen werden (Stand: 07/2019).

[4] Bruce Carter, Ron Mancini:
Op Amps for Everyone
Newnes, 5. Auflage, 2017.
ISBN-13: 978-0128116487

„(...) and an effort has been made to make the material understandable to the relative novice while not too boring for the practicing engineer." Ältere Auflagen können kostenlos aus dem Internet heruntergeladen werden.